

Piccola Biblioteca 512

Richard P. Feynman

SEI PEZZI MENO FACILI



ADELPHI



RICHARD P. FEYNMAN

Sei pezzi meno facili

*Relatività einsteiniana, simmetria,
spazio-tempo*

TRADUZIONE DI GIANNI RIGAMONTI



ADELPHI EDIZIONI

TITOLO ORIGINALE:
Six Not-So-Easy Pieces

© 1963, 1989, 1997 CALIFORNIA INSTITUTE OF TECHNOLOGY
©2004 ADELPHI EDIZIONI S.P.A. MILANO - WWW.ADELPHI.IT
ISBN 88-459-1870-X

INDICE

Prefazione.....	6
1. Vettori.....	10
2. La simmetria nelle leggi fisiche.....	32
3. La teoria della relatività ristretta.....	56
4. Energia e quantità di moto relativistiche.....	79
5. Lo spazio-tempo.....	98
6. Lo spazio curvo.....	116

SEI PEZZI MENO FACILI

I capitoli di questo libro sono stati originariamente pubblicati nell'opera in tre volumi Richard B. Feynman, *Lectures on Physics*, Addison-Wesby, Reading, Mass., 1963-1965 [trad. it. *La fisica di Feynman*, 3 voll., Zanichelli, Bologna, 2001]: vol. I, capp. 11, 52, 15, 16, 17; vol. II, cap. 42.

PREFAZIONE

Queste sono le lezioni di fisica che ho tenuto nel 1961 e 1962 agli studenti del primo e secondo anno del Caltech (California Institute of Technology). Naturalmente non sono riportate parola per parola: sono state rivedute, a volte in modo sostanziale, a volte no. Le lezioni formano soltanto una parte del corso completo. L'intero gruppo di centottanta studenti si riuniva in una grande aula due volte la settimana per ascoltare queste lezioni, e poi si divideva in piccoli gruppi di quindici o venti studenti per le esercitazioni sotto la guida di un assistente; inoltre vi era una sessione di laboratorio una volta la settimana. L'obiettivo principale che ci eravamo prefissi era conservare l'interesse degli studenti che, pieni di entusiasmo e piuttosto intelligenti, arrivano al Caltech dalle scuole superiori. Hanno sentito parlare molto di quanto siano appassionanti e interessanti certi campi della fisica: ad esempio la teoria della relatività, la meccanica quantistica, e altre idee moderne. Capitava invece che al termine del corso molti di loro fossero scoraggiati, perché avevano visto ben poche idee veramente grandi, nuove e moderne. Avevano dovuto studiare piani inclinati, elettrostatica e così via, e dopo due anni erano proprio avviliti. Si trattava quindi di costruire un corso in cui i più bravi e motivati non perdessero l'entusiasmo.

Queste lezioni non intendono essere in alcun modo una semplice rassegna; sono una cosa seria. Pensai di prendere come punto di riferimento i migliori della classe, e di far sì che nemmeno loro riuscissero a comprendere del tutto il contenuto delle lezioni, per esempio suggerendo applicazioni delle idee e dei concetti in varie direzioni, al di fuori della linea principale di ragionamento. Proprio per questo ho cercato di formulare ogni asserzione nel modo più accurato possibile, di sottolineare ogni volta come le equazioni e le idee si integrino nel corpo di conoscenze della fisica, e quali modifiche sarebbero intervenute una volta che si fosse imparato di più. Sentivo anche che per gli studenti è importante aver chiaro che cosa dovrebbero essere in grado di dedurre da quanto detto in precedenza (se sono abbastanza svegli), e cosa invece viene presentato come nuovo.

Quando venivano introdotte nuove idee, io cercavo o di dedurle, se erano deducibili, o di spiegare che si trattava di un concetto nuovo, che non aveva alcuna base nelle cose che già avevano imparato: non era dimostrabile, bisognava proprio aggiungerlo. Nell'iniziare le lezioni presupponevo alcune conoscenze di base da parte degli studenti, cose come l'ottica geometrica, semplici nozioni di chimica, e così via, che si insegnano alle superiori. Inoltre non vedevo ragione di presentare il materiale in un ordine preciso, evitando di parlare di una cosa finché non avessi potuto descriverla in ogni particolare. Al contrario, c'erano continue anticipazioni di argomenti non ancora trattati: una completa discussione sarebbe venuta a suo tempo, con una preparazione adeguata. L'induttanza e i livelli di energia, per esempio, vengono dapprima presentati a livello qualitativo, e solo in seguito diventano oggetto di uno studio approfondito.

Mentre mi rivolgevo agli studenti più attivi, non volevo trascurare il povero studente per il quale i fuochi d'artificio e le applicazioni collaterali sono semplicemente inquietanti, e dal quale sarebbe vano aspettarsi che impari molto del contenuto delle lezioni. A questi studenti volevo presentare almeno un nucleo centrale o spina dorsale della materia che fossero in grado di comprendere. Magari non avrebbero capito tutto, ma potevo sperare che non si innervosissero troppo. Non mi aspettavo che capissero tutto, ma solo le caratteristiche centrali e più dirette. Ci vuole, naturalmente, una certa perspicacia da parte dello studente per capire quali sono i teoremi e le idee più importanti, e quali invece gli argomenti che si potranno comprendere solo negli anni seguenti. Nel fare lezione c'era poi una seria difficoltà: per come era strutturato il corso, chi era in cattedra non aveva modo di capire come stessero andando le cose, dal momento che gli mancava qualsiasi riscontro da parte degli studenti. Io stesso quindi non ho idea di quanto siano buone queste lezioni. É stato essenzialmente un esperimento; se dovessi rifarlo (e spero di non doverlo rifare!) non lo rifarei allo stesso modo. Comunque penso, per quanto riguarda la fisica, che le cose abbiano funzionato abbastanza bene per il primo anno.

Nel secondo anno non fui altrettanto soddisfatto. In particolare, nel trattare di elettricità e magnetismo, non sono riuscito a trovare un modo veramente unico o diverso di presentare la materia, un modo che fosse particolarmente più avvincente di quello usuale. Quindi non credo di aver fatto un granché in questa parte. Alla fine del se-

condo anno avevo intenzione di aggiungere in coda all'elettromagnetismo un paio di lezioni, per dire qualcosa sulle proprietà dei materiali, e soprattutto per introdurre i modi fondamentali, le soluzioni dell'equazione di diffusione, i sistemi vibranti, le funzioni ortogonali, ecc., per fare insomma i primi passi nei cosiddetti metodi matematici della fisica. Se dovessi, oggi, rifare il corso penso che tornerei all'idea originaria; ma allora, dato che non era previsto un nuovo ciclo di lezioni, sembrò una buona idea cercare di dare piuttosto un'introduzione alla meccanica quantistica (che si trova nel terzo volume delle *Lectures*). Certo, chi si laurea in fisica può aspettare fino al terzo anno per imparare la meccanica quantistica, ma molti studenti del nostro corso - si disse - sceglievano fisica solo come materia propedeutica per altre discipline; e il modo standard di presentare la meccanica quantistica la rendeva quasi inaccessibile ai più, perché ci vuole tanto tempo per impararla. Eppure, nelle sue applicazioni reali (specialmente in quelle più complesse, per esempio di ingegneria elettrica e di chimica) non viene effettivamente usato tutto il macchinario delle equazioni differenziali. Così ho cercato di darne un'illustrazione generale che non richiedesse la conoscenza delle equazioni differenziali alle derivate parziali. Anche per un fisico penso sia interessante sforzarsi di presentare la meccanica quantistica in ordine inverso, per ragioni che risulteranno chiare dalle lezioni stesse. Ho però l'impressione che l'esperimento non sia del tutto riuscito, soprattutto per mancanza di tempo (avrei avuto bisogno di tre o quattro lezioni in più, per trattare con maggiore completezza argomenti quali le bande di energia e la dipendenza spaziale delle ampiezze). Inoltre, essendo la prima volta, la mancanza di riscontro da parte degli studenti fu particolarmente grave. Oggi penso che la meccanica quantistica andrebbe presentata in un secondo momento; forse avrò l'occasione di farlo di nuovo, un giorno, e allora lo farò nel modo giusto.

Non ci sono, nel corso, lezioni su come risolvere i problemi, perché per questo c'erano le ore di esercitazioni. In realtà avevo svolto tre lezioni al primo anno sull'argomento, ma non sono incluse in questa raccolta. C'era anche una lezione sulla guida inerziale, certamente appropriata dopo la lezione sui sistemi rotanti, ma sfortunatamente è stata omessa. La quinta e la sesta lezione sono state tenute da Matthew Sands, poiché ero fuori città. La domanda, ovvia, è fino a che punto l'esperimento sia riuscito. La mia impressione - peraltro non

condivisa da quasi nessuno che abbia lavorato con gli studenti - è negativa. Non penso di aver fatto un buon lavoro, dal punto di vista degli studenti. Se guardo come la maggioranza di loro ha affrontato le prove d'esame, devo concludere che il sistema è fallito. Naturalmente qualche collega mi fa notare che una o due decine di studenti - sorprendentemente - avevano capito tutto in ogni lezione, avevano lavorato seriamente e affrontato le cose con entusiasmo e interesse. È presumibile che queste persone abbiano una preparazione di base di prim'ordine in fisica; dopotutto sono proprio quelli che cercavo di raggiungere. Ma ciò significa, allora, che «di rado l'insegnamento è veramente efficace, tranne in quei casi felici in cui è quasi superfluo» (Gibbons). Eppure, non volevo lasciare indietro del tutto nessuno, come invece, forse, è successo. Penso che per dare una mano agli studenti bisognerebbe mettere più impegno nell'inventare problemi che chiariscano i concetti presentati a lezione. Esercizi e problemi forniscono una buona opportunità di completare l'argomento e rendere più reali, più complete, più salde nella mente le idee. A mio avviso, comunque, non c'è soluzione al problema dell'istruzione, oltre a rendersi conto che l'insegnamento migliore è quello che si realizza nel rapporto diretto tra lo studente e un buon insegnante: la situazione in cui lo studente discute le idee, riflette sulle cose, e ne parla. Non si impara molto stando seduti in un'aula, e neppure facendo i compiti assegnati, ma di questi tempi dobbiamo istruire una tal massa di gente che è necessario trovare un'alternativa all'ideale. Forse queste lezioni daranno un contributo in tal senso; forse in qualche oasi felice, dove c'è ancora un rapporto individuale tra studenti e insegnanti, qualcuno ne potrà trarre ispirazione, o qualche buona idea. Forse si divertiranno a pensarci su, o a proseguire nello sviluppo di qualche concetto.

Giugno 1963¹

¹ La presente Prefazione si riferisce al complesso delle *Lectures on Physics*.

1 VETTORI

La simmetria in fisica

In questo capitolo introduciamo un argomento che in fisica è noto, tecnicamente, come *simmetria delle leggi fisiche*. Il termine «simmetria» ha qui un significato particolare, e necessita quindi di una definizione. Quand'è che una cosa è simmetrica? Come possiamo definire questo fatto? In una figura simmetrica, un lato è, in certo qual modo, l'immagine dell'altro. Il professor Hermann Weyl ha dato così la seguente definizione: una cosa è simmetrica se possiamo sottoporla a una certa operazione ed essa ci appare esattamente come prima. Ad esempio, se osserviamo un vaso che presenti una simmetria destra-sinistra e lo ruotiamo di 180° intorno all'asse verticale, esso ci sembrerà uguale a prima. In quanto segue adotteremo la definizione più generale di Weyl e quando parleremo di simmetria delle leggi fisiche l'intenderemo in questo senso. Supponiamo di costruire in un certo posto una macchina molto complessa, con un mucchio di interazioni complicate e sfere che rimbalzano di qua e di là e forze che agiscono fra queste sfere, e così via. E supponiamo ora di costruire da qualche altra parte un'apparecchiatura dello stesso tipo, pezzo per pezzo, con le stesse dimensioni e la stessa disposizione - tutto tale quale, solo traslato di una certa distanza. Poi avviamo le due macchine, poste inizialmente nelle stesse condizioni, in esatta corrispondenza. La domanda è: «Una macchina si comporterà esattamente come l'altra? Compirà tutti i movimenti in perfetto parallelismo?». Naturalmente la risposta può essere *no*, perché scegliendo il luogo sbagliato per la nostra macchina essa potrebbe, ad esempio, trovarsi dentro un muro, e in tal caso l'interferenza della muratura non la farebbe funzionare.

Le idee fisiche non sono concetti esclusivamente matematici o astratti, e nella loro applicazione richiedono una certa dose di buon senso. E così, quando diciamo che spostando l'intera apparecchiatura in una nuova posizione i fenomeni restano gli stessi, bisogna intendersi: il senso è che spostiamo tutto ciò che giudichiamo attinente al suo funzionamento; se il fenomeno cambia, ipotizziamo che qualcosa di importante non sia stato spostato, e cerchiamo di capire

che cos'è. Se non lo troveremo, dichiareremo che le leggi della fisica non hanno quella tal simmetria; e però potremmo anche trovarlo - anzi ci aspettiamo di trovarlo - se quella simmetria ce l'hanno: guardandoci intorno potremmo scoprire, ad esempio, che la parete preme sull'apparato. Allora la domanda fondamentale è: se definiamo accuratamente ogni cosa, se tutte le forze essenziali sono incluse nell'apparato e tutte le parti attinenti vengono spostate in un altro luogo, le leggi saranno le stesse? Il meccanismo funzionerà allo stesso modo?

È chiaro che vogliamo spostare l'intero equipaggiamento e tutte le influenze essenziali, ma non *ogni cosa* nell'universo - stelle, pianeti e tutto il resto - perché in tal caso ci ritroveremmo con lo stesso fenomeno per la semplicissima ragione che saremmo tornati al punto di partenza. Non possiamo spostare *tutto*. Ma in pratica accade che, con un po' di discernimento riguardo alle cose da spostare, l'apparato funzionerà. In altre parole, se non andiamo a finire dentro un muro e se conosciamo l'origine delle forze esterne e facciamo in modo di spostare anche queste, l'apparecchio si comporta allo stesso modo.

Traslazioni

Limitiamo la nostra analisi alla sola meccanica, che ormai conosciamo a sufficienza. Nei capitoli precedenti² abbiamo visto che le sue leggi possono essere condensate in un insieme di tre equazioni per ogni particella:

$$\begin{aligned} m(d^2x/dt^2) &= F_x \\ m(d^2y/dt^2) &= F_y \\ m(d^2z/dt^2) &= F_z. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Ciò significa che è possibile *misurare* x , y e z su tre assi ortogonali, e le forze lungo tali direzioni, in modo che queste leggi siano corrette. Le misure vanno effettuate a partire da una origine, ma dove *ponia-*

² Il riferimento è al capitolo 9 delle *Lectures on Physics*, vol. I [N.d.T].

mo l'origine? Newton, a tutta prima, direbbe semplicemente che *esiste* un punto, magari il centro dell'universo, da cui possiamo prendere le nostre misure in modo da rendere vere queste leggi; ma possiamo dimostrare immediatamente che un simile centro non si troverà mai, perché se usassimo un'altra origine sarebbe la stessa cosa. Supponiamo, in altre parole, che vi siano due persone: Joe, il cui sistema di coordinate ha l'origine in un dato punto, e Moe, che ha un sistema parallelo a quello di Joe ma con un'origine da un'altra parte (fig. 1).

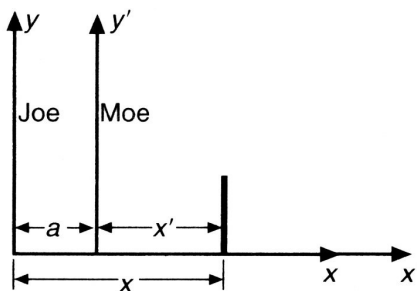


Fig. 1 - Due sistemi di coordinate paralleli.

Ora, quando Joe misura la posizione di un punto nello spazio la trova in x , y e z (ma, di norma, z verrà lasciata da parte, per non creare confusione nella figura) ; invece Moe, per lo stesso punto, otterrà una x diversa (per distinguerla la chiameremo x'), e in linea di massima una diversa y , benché nel nostro esempio y e y' siano numericamente uguali. Abbiamo così

$$x' = x - a, y' = y, z' = z. \quad (1.2)$$

A questo punto, per completare la nostra analisi dobbiamo sapere quali valori otterrebbe Moe per le forze. Si suppone che una forza agisca lungo una certa linea; per forza nella direzione x intendiamo quella parte della forza totale che ha quella direzione, ossia l'intensità della forza per il coseno dell'angolo che essa forma con l'asse x . Vediamo ora che Moe e Joe utilizzerebbero entrambi la stessa proiezione; avremo quindi l'insieme di equazioni

$$F_{x'} = F_x, F_{y'} = F_y, F_{z'} = F_z. \quad (1.3)$$

Queste sarebbero le relazioni tra le grandezze osservate da Moe e da Joe.

Supponiamo che Joe conosca le leggi di Newton. La domanda è: se Moe cercasse di scrivere queste leggi, esse sarebbero giuste anche per lui? Fa differenza da quale origine si misurano le coordinate dei punti? In altre parole, supponendo che valgano le equazioni (1.1) e che le equazioni (1.2) e (1.3) diano la relazione tra le misure, è vero o no che

$$\begin{aligned} (a) \quad m(d^2x'/dt^2) &= F_{x'} \\ (b) \quad m(d^2y'/dt^2) &= F_{y'} \\ (c) \quad m(d^2z'/dt^2) &= F_{z'}? \end{aligned} \tag{1.4}$$

Per rispondere a tale domanda dobbiamo derivare due volte rispetto al tempo le relazioni (1.2). Si ha innanzitutto

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{d}{dt}(x-a) = \frac{dx}{dt} - \frac{da}{dt}.$$

Supponiamo adesso che l'origine di Moe sia immobile nel riferimento di Joe; dunque a è costante e $da/dt = 0$, e quindi

$$dx'/dt = dx/dt$$

e di conseguenza

$$d^2x'/dt^2 = d^2x/dt^2;$$

e l'equazione (1.4a) diventa

$$m(d^2x/dt^2) = F_{x'}.$$

(Si suppone che anche le masse misurate da Joe e da Moe siano uguali). Il prodotto della massa per l'accelerazione è dunque lo stesso in entrambi i sistemi. Abbiamo pure ricavato l'espressione di $F_{x'}$, perché sostituendo dalla (1.1) si ha

$$F_{x'} = F_x.$$

Viste da Moe, le leggi sono dunque le stesse; egli può scrivere le leggi di Newton in un diverso sistema di coordinate, ed esse risulteranno ancora corrette. Ciò significa che non c'è un unico modo di definire l'origine dell'universo, perché le leggi appariranno le stesse, da qualunque posizione vengano osservate.

È vera anche un'altra cosa: se in un dato luogo vi è un'apparecchiatura con congegni di un certo tipo, la stessa apparecchiatura si comporterà allo stesso modo anche da un'altra parte. Come mai? Perché la prima macchina, quando è esaminata da Moe, ha esattamente le stesse equazioni di quell'altra, analizzata da Joe; e poiché le *equazioni* sono le stesse, appaiono uguali anche i *fenomeni*. Dunque dimostrare che un'apparecchiatura, in una nuova posizione, si comporta come prima equivale a dimostrare che in una traslazione di assi le equazioni rimangono le stesse. Diremo quindi che *le leggi della fisica sono simmetriche rispetto alle traslazioni* - nel senso che non variano in seguito a traslazioni del sistema di coordinate. Intuitivamente sembra una cosa ovvia, ma sarà interessante e divertente esaminare la matematica che c'è sotto.

Rotazioni

Quella che abbiamo appena visto è la prima di una serie di proposizioni, sempre più complicate, riguardo alla simmetria delle leggi fisiche. La seconda richiede che le leggi siano indipendenti dalla *direzione* degli assi. In altre parole, se in un certo luogo costruiamo un macchinario e ne osserviamo il funzionamento, e lì vicino ne costruiamo uno identico ma lo disponiamo ad angolo col primo, funzionerà allo stesso modo? Se si tratta di un orologio a pendolo, no di sicuro! Se è in posizione verticale un orologio a pendolo funziona regolarmente, ma se viene inclinato il pendolo cade sul lato della cassa e tutto finisce lì. Per l'orologio a pendolo, quindi, il teorema è falso, a meno di tener conto anche della Terra e della sua attrazione. Pertanto, se crediamo che le leggi fisiche siano invarianti per rotazione, possiamo prevedere che nel funzionamento degli orologi a pendolo entri in gioco qualche altra cosa oltre al meccanismo interno, qualcosa di esterno, che dobbiamo trovare. Possiamo anche prevedere

che due orologi a pendolo non funzioneranno allo stesso modo quando, relativamente a questa misteriosa fonte di asimmetria (la Terra?), si trovano in posizioni diverse. Sappiamo ad esempio che su un satellite artificiale, in assenza di gravità, un pendolo non potrebbe oscillare e su Marte avrebbe un ritmo diverso. Gli orologi a pendolo, quindi, implicano che vi sia qualcosa in più oltre al meccanismo interno, qualcosa che sta fuori; e una volta individuato questo fattore, scopriamo che occorre ruotare la Terra insieme a tutto l'apparato. Niente paura, è molto semplice: basta aspettare un po' finché la Terra sia ruotata, e il pendolo, nella nuova posizione, ricomincerà a ticchettare come prima. Mentre noi ruotiamo nello spazio, i nostri angoli, in un riferimento assoluto, cambiano continuamente, ma la cosa non ci preoccupa molto, perché nella nuova posizione ci sembra di essere nelle condizioni di prima. Tutto ciò rischia di creare confusione, perché è vero che nella nuova posizione ruotata le leggi sono ancora quelle di prima, ma *non* è vero che durante una rotazione valgono le stesse leggi. Con esperimenti abbastanza raffinati è possibile stabilire che la Terra *sta ruotando*, ma non che *è ruotata*; in altre parole, non possiamo individuare la sua posizione angolare, però possiamo dire che essa sta cambiando.

E adesso possiamo discutere gli effetti dell'orientamento angolare sulle leggi fisiche. Cercheremo di capire se il nostro gioco con Joe e Moe funziona ancora, ma questa volta, per evitare complicazioni inutili, supporremo che i due usino la stessa origine (abbiamo già mostrato che è possibile spostare gli assi in un altro punto con una traslazione). Supponiamo che gli assi di Moe siano ruotati di un angolo θ rispetto a quelli di Joe; i due sistemi di coordinate sono rappresentati nella figura 2, limitatamente a due dimensioni.

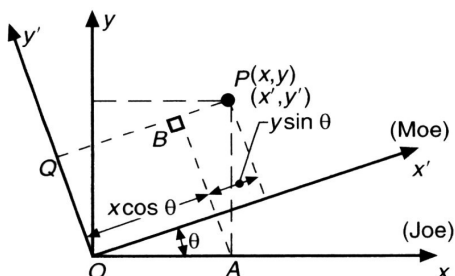


Fig. 2 - Due sistemi di coordinate ruotati l'uno rispetto all'altro.

Consideriamo un punto P avente coordinate (x, y) nel sistema di Joe

e coordinate (x', y') in quello di Moe; come nel caso precedente, cominciamo con l'esprimere le coordinate x e y per mezzo di x' e y' . A tale scopo, abbassiamo dapprima da P le perpendicolari a tutti e quattro gli assi e tracciamo AB , perpendicolare a PQ . Dalla figura si vede che x' può essere scritta come somma di due lunghezze lungo l'asse x' , e y' come differenza di due lunghezze lungo AB . Tutte queste lunghezze sono espresse per mezzo di x , y e θ nelle equazioni seguenti (ove si è aggiunta un'equazione per la terza dimensione):

$$\begin{aligned}x' &= x \cos \theta + y \sin \theta \\y' &= y \cos \theta - x \sin \theta \\z' &= z.\end{aligned}\tag{1.5}$$

Il passo successivo consiste nell'analizzare la relazione tra le forze osservate da Joe e da Moe usando lo stesso metodo generale di prima. Supponiamo che una forza F , che ha componenti (dal punto di vista di Joe) F_x e F_y , agisca su una particella di massa m , posta nel punto P della figura 2; spostiamo per semplicità i due sistemi di assi in modo che entrambi abbiano origine in P , come nella figura 3.

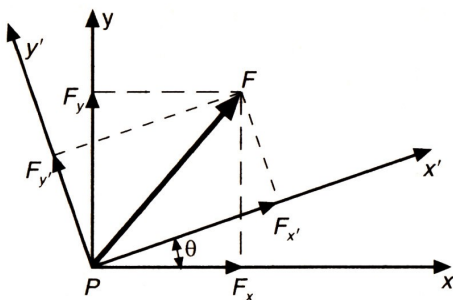


Fig. 3 - Componenti di una forza nei due sistemi.

Moe vede le componenti di F lungo i propri assi come $F_{x'}$ e $F_{y'}$. F_x ha componenti tanto lungo l'asse x' quanto lungo l'asse y' , e lo stesso si può dire di F_y . Per esprimere $F_{x'}$ mediante F_x e F_y sommiamo le componenti di F_x e F_y lungo l'asse x' ; in modo analogo possiamo esprimere $F_{y'}$ in termini di F_x e F_y . Il risultato è

$$\begin{aligned}F_{x'} &= F_x \cos \theta + F_y \sin \theta \\F_{y'} &= F_y \cos \theta - F_x \sin \theta \\F_{z'} &= F_z.\end{aligned}\tag{1.6}$$

È interessante osservare come, casualmente, ci siamo imbattuti in un risultato di estrema importanza: le formule (1.5) e (1.6), che danno rispettivamente le coordinate di P e le componenti di F , *hanno la stessa forma*.

Come prima, supporremo che le leggi di Newton siano vere nel sistema di Joe e siano espresse dalle (1.1); la domanda, di nuovo, è se per Moe sia lecito applicarle: nel suo sistema di assi ruotati, i risultati saranno corretti? In altri termini, supponendo che la relazione tra le misure sia data dalle (1.5) e (1.6), è vero o no che

$$\begin{aligned} m(d^2x'/dt^2) &= F_{x'} \\ m(d^2y'/dt^2) &= F_{y'} \\ m(d^2z'/dt^2) &= F_{z'}? \end{aligned} \quad (1.7)$$

Per verificare se le (1.7) siano corrette, calcoliamo separatamente il primo e il secondo membro e confrontiamo i risultati. Per calcolare i primi membri, moltiplichiamo le (1.5) per m e deriviamo due volte rispetto al tempo, supponendo θ costante. Otteniamo così

$$\begin{aligned} m(d^2x'/dt^2) &= m(d^2x/dt^2) \cos \theta + m(d^2y/dt^2) \sin \theta \\ m(d^2y'/dt^2) &= m(d^2y/dt^2) \cos \theta - m(d^2x/dt^2) \sin \theta \\ m(d^2z'/dt^2) &= m(d^2z/dt^2). \end{aligned} \quad (1.8)$$

Calcoliamo ora i secondi membri delle equazioni (1.7), sostituendo nelle (1.6) le espressioni (1.1); otteniamo

$$\begin{aligned} F_{x'} &= m(d^2x/dt^2) \cos \theta + m(d^2y/dt^2) \sin \theta \\ F_{y'} &= m(d^2y/dt^2) \cos \theta - m(d^2x/dt^2) \sin \theta \\ F_{z'} &= m(d^2z/dt^2). \end{aligned} \quad (1.9)$$

Mirate! I secondi membri delle equazioni (1.8) e (1.9) sono identici, e quindi se ne conclude che, se le leggi di Newton sono corrette per un certo sistema di assi, allora valgono pure per ogni altro sistema. Questo risultato, ormai stabilito tanto per la traslazione quanto per la rotazione degli assi, ha talune implicazioni: primo, nessuno può affermare che i suoi particolari assi siano unici - anche se, naturalmente, essi potranno essere più *convenienti* per determinati problemi (per esempio è comodo che un asse abbia la stessa direzione della

gravità). Secondo, comunque venga ruotata, un'apparecchiatura che sia completamente autosufficiente - nel senso che ogni fonte di energia è al suo interno - funzionerà allo stesso modo.

Vettori

Oggi sappiamo che non soltanto le leggi di Newton, ma anche le altre leggi della fisica godono delle proprietà di invarianza (o simmetria) per la traslazione e per la rotazione degli assi. Queste proprietà sono talmente importanti che è stata inventata una tecnica matematica per poterle sfruttare adeguatamente nella formulazione e nell'applicazione delle leggi medesime. L'analisi precedente ha richiesto calcoli alquanto tedious. Esiste tuttavia un meccanismo matematico molto potente, detto *analisi vettoriale*, che consente di trattare simili questioni riducendo al minimo i dettagli. Con i metodi visti finora saremmo sicuramente in grado di compiere tutti i passi delle varie dimostrazioni, ma in pratica vorremmo procedere più facilmente e speditamente; e quindi usiamo i vettori.

Abbiamo notato all'inizio alcune caratteristiche di due classi di grandezze che sono importanti in fisica. (In realtà ce ne sono di più, ma partiremo da queste). Da un lato vi sono le grandezze - si pensi al numero di patate in un sacco - denominate *scalari*, ovvero grandezze ordinarie, prive di direzione. Un esempio è la temperatura. Dall'altro le grandezze, anch'esse molto importanti, che hanno invece una direzione; ad esempio la velocità: dobbiamo sapere da che parte un corpo si muove, non solo quanto è rapido. La quantità di moto (o momento) e la forza hanno anch'esse una direzione, e così pure lo spostamento - quando qualcuno si sposta da un luogo a un altro, per sapere *dove* è andato dobbiamo specificare direzione e verso, non soltanto la distanza percorsa.

Chiamiamo *vettori* tutte le grandezze che - come uno spostamento nello spazio - hanno una direzione.

Un vettore consiste in una terna di numeri. Per rappresentare uno spostamento nello spazio - diciamo dall'origine a un punto P in posizione (x, y, z) - abbiamo bisogno in effetti di tre numeri, ma a questo punto inventiamo un unico simbolo matematico, $\mathbf{r}$, diverso da quelli

usati finora;³ *non* è un singolo numero, ma rappresenta tre numeri: x , y e z . Anzi, non rappresenta solo *quei* tre, perché in un diverso sistema di coordinate x , y e z si muterebbero in x' , y' e z' . Noi però vogliamo una matematica semplice, e pertanto scriveremo semplicemente $\mathbf{r}$, convenendo che il simbolo indichi (x, y, z) se utilizziamo un certo sistema di assi, (x', y', z') se ne utilizziamo un altro, e così via. Il vantaggio è che, cambiando il sistema di coordinate, non dobbiamo cambiare le lettere nelle equazioni. Altrimenti, se scrivessimo un'equazione in x, y, z , e poi passassimo a un altro sistema di coordinate, dovremmo usare lettere diverse. I tre numeri che descrivono lo spostamento dall'origine in un dato sistema di coordinate sono le *componenti* del vettore nelle direzioni degli assi di quel sistema. Usiamo cioè lo stesso simbolo per le tre lettere, a ciascuna delle quali corrisponde lo stesso oggetto visto da un'angolazione diversa. Il fatto stesso di poter dire «lo stesso oggetto» implica un'intuizione fisica circa la realtà di uno spostamento nello spazio, che è indipendente dalle componenti per mezzo delle quali lo misuriamo. Dunque il simbolo $\mathbf{r}$ rappresenterà sempre la stessa cosa, comunque ruotiamo gli assi.

Supponiamo ora che vi sia un'altra grandezza fisica dotata di direzione, ad esempio la forza, alla quale pure siano associati tre numeri, e che questi numeri, in un mutamento di assi, si trasformino secondo una certa regola matematica in altri tre. La regola dev'essere la stessa che muta (x, y, z) in (x', y', z') . In altre parole, qualsiasi grandezza fisica associata a tre numeri che si trasformano come le componenti di uno spostamento nello spazio è un vettore. Pertanto, se un'equazione come

$$\mathbf{F} = \mathbf{r}$$

è vera in un sistema di coordinate, lo sarà in qualunque altro. Naturalmente $\mathbf{F} = \mathbf{r}$ sta per le tre equazioni scalari

$$F_x = x, F_y = y, F_z = z,$$

o, in alternativa, per

$$F_{x'} = x', F_{y'} = y', F_{z'} = z',$$

³ Nella forma manoscritta i vettori vengono abitualmente indicati con una freccia: $\vec{r}$.

Il fatto che una relazione fisica si possa esprimere come equazione vettoriale ci garantisce che una semplice rotazione del sistema di coordinate lascerà invariata quella relazione. Ecco perché i vettori sono così utili in fisica.

Ora esamineremo alcune loro proprietà. Come esempi di vettori possiamo citare la velocità, la quantità di moto, la forza e l'accelerazione; spesso conviene rappresentare una grandezza vettoriale per mezzo di una freccia che indica la direzione in cui agisce. Perché possiamo rappresentare con una freccia una forza, ad esempio? Perché è soggetta alle stesse trasformazioni matematiche di uno «spostamento nello spazio». Possiamo quindi rappresentarla in un diagramma come uno spostamento, usando una scala in cui un'unità di forza, vale a dire un newton, corrisponda a una certa lunghezza. Una volta fatto questo, tutte le forze potranno essere rappresentate come lunghezze, dato che un'equazione del tipo

$$\mathbf{F} = k\mathbf{r},$$

dove k è una costante, è perfettamente legittima. Così possiamo sempre rappresentare le forze mediante segmenti rettilinei, il che è molto comodo, perché una volta tracciato il segmento non abbiamo più bisogno degli assi. Naturalmente, possiamo calcolare rapidamente le tre componenti, quando cambiano al ruotare degli assi: è solo un problema di geometria.

Algebra vettoriale

Dobbiamo ora descrivere le leggi, ovvero le regole, per combinare i vettori in varie maniere. La prima di queste combinazioni è *la somma* di due vettori: supponiamo che $\mathbf{a}$ sia un vettore e in qualche particolare sistema di coordinate abbia le componenti (a_x, a_y, a_z) , e che $\mathbf{b}$ sia un altro vettore e in quello stesso sistema abbia le componenti (b_x, b_y, b_z) . Introduciamo tre nuovi numeri: $(a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z)$. Formano un vettore? Qualcuno dirà: «Be', sono tre numeri e ogni terna di numeri è un vettore». E invece no, non *tutte* le terne! Per

avere un vettore, non solo devono esservi tre numeri, ma la terna deve essere associata a un sistema di coordinate in modo tale che, in una rotazione di assi, i numeri si trasformino gli uni negli altri, si «mescolino» tra loro secondo quelle leggi precise che abbiamo descritto. Perciò la domanda è: se ruotiamo il sistema di coordinate, così che (a_x, a_y, a_z) si mutino in $(a_{x'}, a_{y'}, a_{z'})$, e (b_x, b_y, b_z) in $(b_{x'}, b_{y'}, b_{z'})$, come si trasformano $(a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z)$? Diventano $(a_{x'} + b_{x'}, a_{y'} + b_{y'}, a_{z'} + b_{z'})$ oppure no? La risposta naturalmente è sì, perché le trasformazioni-prototipo, quelle delle equazioni (1.5), costituiscono quella che va sotto il nome di trasformazione *lineare*: se le applichiamo ad a_x e b_x ricavandone $a_{x'}$ e $b_{x'}$, vediamo che realmente la trasformata della somma $a_x + b_x$ è uguale alla somma delle trasformate $a_{x'} + b_{x'}$. Quando i vettori **a** e **b** vengono così «sommati», formano un nuovo vettore che chiameremo **c**. Esprimiamo questo fatto scrivendo

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b} .$$

Ma **c**, come si vede immediatamente dalle sue componenti, ha l'interessante proprietà che

$$\mathbf{c} = \mathbf{b} + \mathbf{a} .$$

Inoltre vale anche

$$\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c},$$

per cui possiamo sommare i vettori in qualsiasi ordine.

Ma qual è il significato geometrico di $\mathbf{a} + \mathbf{b}$? Immaginando che **a** e **b** siano rappresentati da linee tracciate su un foglio di carta, che aspetto avrà **c**? Ce lo mostra la figura 4, dove si vede che la maniera più conveniente di sommare le componenti di **b** a quelle di **a** consiste nel collocare il rettangolo che rappresenta le prime di seguito a quello che rappresenta le seconde nel modo indicato.

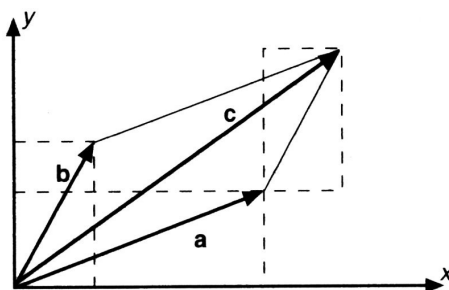


Fig. 4 - Somma di vettori.

Poiché **b** «entra» esattamente nel proprio rettangolo, come fa **a** con il suo, ciò equivale a sovrapporre la «coda» di **b** alla «punta» di **a**, e a quel punto la freccia che va dalla «coda» di **a** alla «punta» di **b** sarà il vettore **c**. Ovviamente, se sommassimo **a** a **b** nell'ordine opposto metteremmo la «coda» di **a** sulla «punta» di **b** e per **c** otterremmo, grazie alle proprietà geometriche dei parallelogrammi, lo stesso risultato. Si noti che in tal modo possiamo sommare i vettori senza mai tirare in ballo gli assi di un sistema di coordinate. Supponiamo ora di moltiplicare un vettore **a** per un numero (uno scalare) α : che cosa significa ciò? *Per definizione*, conveniamo che sia un nuovo vettore, di componenti αa_x , αa_y e αa_z . La dimostrazione che si tratta effettivamente di un vettore è lasciata al lettore come esercizio. Passiamo ora alla sottrazione di vettori: la possiamo definire allo stesso modo della somma, solo che ora, invece di sommare le componenti, le sottraiamo. Ma potremmo anche definire la sottrazione introducendo un vettore negativo $-\mathbf{b} = -1\mathbf{b}$ e sommando le componenti: il risultato è lo stesso, ed è quello che vediamo nella figura 5, la quale mostra appunto che $\mathbf{d} = \mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b})$.

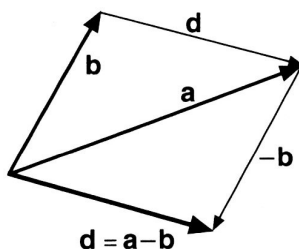


Fig. 5 - Differenza di vettori.

Notiamo fra l'altro che la differenza $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ si ricava facilmente da **a** e **b** usando la relazione equivalente $\mathbf{a} = \mathbf{b} + \mathbf{d}$. È ancora più facile da

trovare della somma, perché per ottenerla basta tracciare il vettore da **b** ad **a**!

E parliamo finalmente della velocità. Perché è un vettore? E se la posizione è data dalle tre coordinate (x, y, z), la velocità che cos'è? Sappiamo che è data da dx/dt , dy/dt e dz/dt , ma questa terna è davvero un vettore? Possiamo scoprirlo derivando le espressioni delle equazioni (1.5) per stabilire se dx'/dt si trasforma in modo appropriato. Troviamo che le componenti dx/dt e dy/dt si trasformano effettivamente secondo le stesse leggi che valgono per x e y , e dunque la derivata rispetto al tempo è un vettore. La velocità, quindi, è un vettore. Possiamo esprimerla in una forma interessante come

$$\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt .$$

È anche possibile spiegare che cos'è la velocità, e perché è un vettore, in forma più pittorica. Di quanto si sposta una particella in un tempuscolo Δt ? Risposta: se in un certo istante è «qui» e in un altro «là», la differenza tra i vettori di posizione $\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$, che è nella direzione del moto, come mostra la figura 6, divisa per l'intervallo temporale $\Delta t = t_2 - t_1$, sarà il vettore «velocità media».

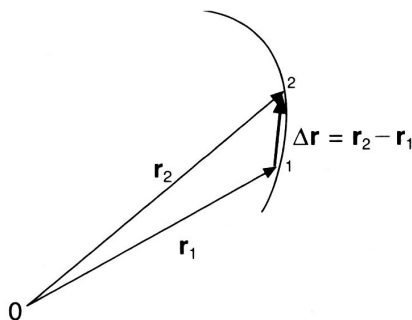


Fig. 6 - Spostamento di una particella in un piccolo intervallo temporale $\Delta t = t_2 - t_1$.

In altre parole, per vettore velocità intendiamo il limite, per Δt tendente a 0, della differenza tra i raggi vettori al tempo $t + \Delta t$ e al tempo t divisa per Δt :

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (\Delta \mathbf{r} / \Delta t) = d\mathbf{r}/dt \quad (1.10)$$

Essendo la differenza di due vettori la velocità è quindi un vettore; e la definizione (1.10) è corretta perché le sue componenti sono dx/dt , dy/dt e dz/dt . Questa discussione mostra in effetti che derivando un qualsiasi vettore rispetto al tempo si ottiene un nuovo vettore. Vi sono così diversi modi di produrre vettori da vettori: 1) moltiplicazione per una costante, 2) derivazione rispetto al tempo, 3) somma o differenza di vettori.

Le leggi di Newton in notazione vettoriale

Per scrivere le leggi di Newton in forma vettoriale ci resta da fare un solo passo: definire il vettore accelerazione, cioè la derivata rispetto al tempo del vettore velocità. Si dimostra facilmente che le sue componenti sono le derivate seconde di x , y e z rispetto a t :

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \left(\frac{d}{dt} \right) \left(\frac{\mathbf{r}}{dt} \right) = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \quad (1.11)$$

$$\begin{aligned} a_x &= \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} \\ a_y &= \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} \\ a_z &= \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2} \end{aligned} \quad (1.12)$$

Con questa definizione, le leggi di Newton possono essere scritte così:

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F} \quad (1.13)$$

oppure

$$m(d^2\mathbf{r}/dt^2) = \mathbf{F} . \quad (1.14)$$

Ora, il problema di dimostrare l'invarianza di queste leggi rispetto alla rotazione consiste nel dimostrare che $\mathbf{a}$ è un vettore - e l'abbiamo appena fatto - e che $\mathbf{F}$ è un vettore, e noi per ipotesi *supponiamo* che lo sia. Se la forza è un vettore, poiché sappiamo che anche l'accelerazione lo è, la (1.13) avrà la stessa forma in ogni sistema di coordinate. Il fatto di non contenere esplicitamente tutte le x , y e z ci dà il vantaggio di non dover più scrivere, d'ora in poi, *tre* formule ogni volta che citiamo le equazioni di Newton o altre leggi fisiche. Quella che scriviamo sembra *una sola* legge, ma in realtà si tratta di tre leggi per ogni particolare sistema di assi, perché un'equazione vettoriale implica che l'uguaglianza vale per ciascuna delle componenti.

Il fatto che l'accelerazione sia la rapidità di variazione del vettore velocità ci aiuta a calcolarla anche in condizioni alquanto intricate. Supponiamo ad esempio che una particella si muova lungo una traiettoria (fig. 7) e che, a un dato istante t_1 , abbia una certa velocità $\mathbf{v}_1$, ma in un istante t_2 di poco posteriore abbia una velocità diversa $\mathbf{v}_2$. Che cos'è l'accelerazione?

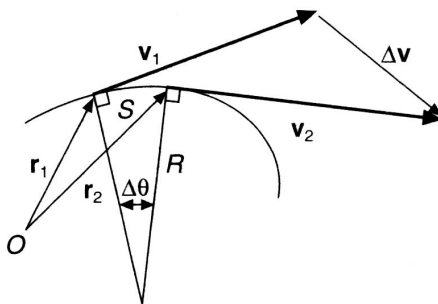


Fig. 7 - Traiettoria curvilinea.

Risposta: l'accelerazione è la differenza tra le due velocità divisa per questo piccolo intervallo di tempo; ma come trovarla? Per sottrarre i due vettori tracciamo il vettore che unisce le estremità di $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$; quindi la differenza delle velocità è $\Delta\mathbf{v}$, giusto? *Niente affatto!* La cosa funziona solo quando i vettori hanno origine nello stesso punto. Non ha senso spostarne uno e poi tracciare la congiungente tra le due estremità. Quindi occhio! Per sottrarre i vettori dobbiamo disegnare un diagramma come quello della figura 8, dove $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ sono entrambi uguali e paralleli (equipollenti) ai corrispondenti vettori della figura 7; a questo punto possiamo discutere l'accelerazione, la quale, ovviamente, altro non è che $\Delta\mathbf{v}/\Delta t$.

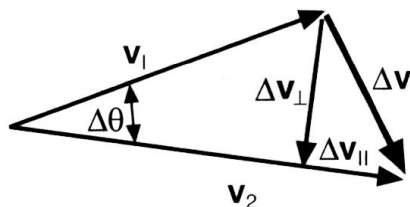


Fig. 8 - Diagramma per il calcolo dell'accelerazione.

È interessante notare che la differenza di velocità si può pensare come composta di due parti; possiamo pensare che l'accelerazione abbia due componenti, $\Delta \mathbf{v}_{||}$, diretto tangenzialmente alla traiettoria, e $\Delta \mathbf{v}_{\perp}$, perpendicolare ad essa, come indicato nella figura 8. Ovviamente l'accelerazione tangenziale è solo la variazione della *lunghezza* del vettore, ossia la variazione del modulo v della velocità:

$$a_{||} = dv/dt . \quad (1.15)$$

L'altra componente dell'accelerazione, quella perpendicolare alla curva, è facilmente calcolabile mediante le figure 7 e 8. Nel breve intervallo di tempo Δt , l'angolo tra $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ varierà di un piccolo angolo $\Delta\theta$. Detto v il modulo della velocità, avremo naturalmente

$$Av_{\perp} = v\Delta\theta$$

e l'accelerazione sarà

$$a_{\perp} = v(\Delta\theta/\Delta t) .$$

A questo punto ci serve conoscere $\Delta\theta/\Delta t$, e possiamo trovarlo così: in un tempo Δt , la distanza s percorsa sulla curva è, ovviamente, $v\Delta t$; se all'istante dato la curva coincide approssimativamente con una circonferenza di raggio R , allora

$$A = v(\Delta t/R), \text{ ossia } \Delta\theta/\Delta t = v/R .$$

Otteniamo perciò, come abbiamo già visto,

$$a = v^2/R . \quad (1.16)$$

Prodotto scalare di vettori

Approfondiamo un poco le proprietà dei vettori. È facile vedere che la *lunghezza* di uno spostamento nello spazio sarebbe la stessa in tutti i sistemi di coordinate; vale a dire, se un determinato spostamento $\mathbf{r}$ è rappresentato da x, y, z in un sistema e da x', y', z' in un altro, la distanza $r = |\mathbf{r}|$ sarà sicuramente la stessa in entrambi. Ora,

$$r = \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)}$$

e

$$r' = \sqrt{(x'^2 + y'^2 + z'^2)}$$

Si tratta quindi di verificare se queste due quantità siano uguali. È molto più comodo non doversi preoccupare di estrarre la radice quadrata; consideriamo quindi il quadrato della distanza, e verifichiamo se

$$x^2 + y^2 + z^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2. \quad (1.17)$$

C'è da sperare che sia vero - e facendo le sostituzioni (1.5) scopriamo che in effetti è così. Vediamo quindi che vi sono altri tipi uguaglianze che sono vere per qualunque coppia di sistemi di coordinate. Qui entra in gioco qualcosa di nuovo. Siamo in grado di ricavare una nuova grandezza, una funzione in x, y e z detta *funzione scalare*, che non ha direzione ma è la stessa in entrambi i sistemi. Da un vettore possiamo ottenere uno scalare: dobbiamo trovare per questo una regola generale. In questo caso è chiaro quale sia la regola: sommare i quadrati delle componenti. Introduciamo ora una nuova cosa che indichiamo con $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}$. Non si tratta di un vettore, ma di uno scalare, un numero definito come somma dei quadrati delle tre componenti del vettore considerato:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2. \quad (1.18)$$

Ora direte: «Con quali assi?». Ebbene, la risposta è che tale numero non dipende dal sistema di assi. Abbiamo dunque una quantità di

nuovo tipo, un *invariante scalare*, prodotto da un vettore «al quadrato». Se ora definiamo, per ogni coppia di vettori **a** e **b**,

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z, \quad (1.19)$$

scopriamo che anche questa quantità, sia che la calcoliamo nel sistema accentato che in quello non accentato, resta la stessa. Per dimostrarlo osserviamo che ciò vale per **a**·**a**, **b**·**b** e **c**·**c**, dove **c** = **a** + **b**. Pertanto la somma di quadrati $(a_x + b_x)^2 + (a_y + b_y)^2 + (a_z + b_z)^2$ sarà invariante,

$$\begin{aligned} (a_x + b_x)^2 + (a_y + b_y)^2 + (a_z + b_z)^2 = \\ (a_{x'} + b_{x'})^2 + (a_{y'} + b_{y'})^2 + (a_{z'} + b_{z'})^2. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Sviluppando ambo i membri dell'equazione troviamo prodotti misti del tipo di quelli della (1.19), oltre alle somme dei quadrati delle componenti di **a** e **b**; e l'invarianza dei termini del tipo (1.18) fa sì che siano invarianti anche i prodotti incrociati (1.19).

L'espressione **a**·**b** è detta *prodotto scalare* dei vettori **a** e **b** e ha varie proprietà interessanti. Si dimostra facilmente, ad esempio, che

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}. \quad (1.21)$$

Vi è inoltre una semplice regola geometrica per calcolare **a**·**b** senza passare per il calcolo delle componenti: **a**·**b** è uguale al modulo di **a** per il modulo di **b** per il coseno dell'angolo fra essi compreso. E perché? Supponiamo di scegliere uno speciale sistema di coordinate in cui **a** giaccia lungo l'asse delle *x*: in tal caso l'unica componente effettiva di **a** sarà a_x , che è ovviamente l'intera lunghezza di **a**. In questo caso, quindi, l'equazione (1.19) si ridurrà a **a**·**b** = $a_x b_x$, cioè ad *a* per la componente di **b** nella direzione di **a**, che è $b \cos \theta$:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = ab \cos \theta.$$

Abbiamo così dimostrato che per questo speciale sistema di coordinate **a**·**b** è la lunghezza di **a** per la lunghezza di **b** per $\cos \theta$. *Ma se questo è vero in un sistema di coordinate è vero in tutti*, perché **a**·**b** è indipendente dal sistema di coordinate; fine della dimostrazione. Qual è l'utilità del prodotto scalare? Vi sono casi in fisica in cui è ne-

cessario? Certo, ve n'è una continua necessità. Abbiamo detto, ad esempio,⁴ che l'energia cinetica è $\frac{1}{2}mv^2$, ma se un corpo si muove nello spazio il quadrato della velocità dovrebbe essere la somma dei quadrati delle velocità nelle direzioni x , y e z ; quindi la formula dell'energia cinetica diventa, in base all'analisi vettoriale,

$$\text{E.C.} = \frac{1}{2} m (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) = \frac{1}{2} m (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2). \quad (1.22)$$

L'energia non ha direzione; ce l'ha invece la quantità di moto, un vettore uguale alla massa per il vettore velocità.

Un altro esempio di prodotto scalare è il lavoro compiuto da una forza quando un oggetto viene spostato da un punto a un altro. Ancora non abbiamo definito il lavoro; ma esso equivale alla variazione di energia - si pensi al sollevamento di un peso - che ha luogo quando una forza $\mathbf{F}$ agisce per una certa distanza:

$$\text{Lavoro} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{s}. \quad (1.23)$$

Talvolta è molto conveniente parlare della componente di un vettore in una certa direzione (ad esempio nella direzione verticale, che è quella della gravità). Per questi scopi è utile introdurre un *vettore unitario*, o *versore*, nella direzione che vogliamo studiare. Per vettore unitario intendiamo un vettore che moltiplicato scalarmente per se stesso è uguale a uno. Se $\mathbf{i}$ è un tale vettore, si ha $\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = 1$. Se a questo punto facciamo il prodotto scalare $\mathbf{a} \cdot \mathbf{i}$, otteniamo $a \cos \theta$, che è proprio la componente di $\mathbf{a}$ nella direzione di $\mathbf{i}$. È un modo interessante per ricavare la componente, anzi ci permette di ottenerle *tutte* e di scrivere una formula abbastanza divertente. Dato un sistema di coordinate cartesiane x , y , z , introduciamo ora i vettori unitari $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ corrispondenti alle direzioni x , y , z . Naturalmente $\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = 1$, e lo stesso vale per $\mathbf{j}$ e $\mathbf{k}$; ma che cos'è, ad esempio, $\mathbf{i} \cdot \mathbf{k}$? Nel caso di due vettori perpendicolari il prodotto scalare è zero, e quindi

$$\begin{aligned} \mathbf{i} \cdot \mathbf{i} &= 1, \\ \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} &= 0, \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = 1, \\ \mathbf{i} \cdot \mathbf{k} &= 0, \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = 0, \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1. \end{aligned} \quad (1.24)$$

Con queste definizioni qualsiasi vettore può essere scritto nella for-

⁴ 1. Il riferimento è al capitolo 4 delle *lectures on Physics*, vol. I.

ma

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k} . \quad (1.25)$$

In tal modo possiamo passare dalle componenti di un vettore al vettore stesso. Questa discussione sui vettori è tutt'altro che completa. Prima però di tentare di colmare le nostre lacune, impareremo ad applicare alcune delle idee esaminate finora a problemi fisici concreti. Quando saremo sufficientemente padroni delle nozioni di base ci sarà più facile approfondire l'argomento senza fare troppa confusione; in seguito scopriremo che è utile definire anche un altro tipo di prodotto tra vettori, chiamato prodotto *esterno* o *vettoriale*, scritto come $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$. Ma di questo si parlerà in un capitolo successivo.

LA SIMMETRIA NELLE LEGGI FISICHE

Operazioni di simmetria

L'oggetto di questo capitolo è ciò che potremmo chiamare simmetria *nelle leggi fisiche*. Ne abbiamo già esaminate alcune proprietà con riferimento all'analisi vettoriale (cap. 1), alla teoria della relatività (si veda oltre, cap. 4) e alla rotazione (cap. 20 delle *Lectures on Physics*, vol. I). Perché dovremmo interessarci alla simmetria? Innanzitutto perché la mente umana la trova affascinante: a tutti piacciono gli oggetti e i motivi che in qualche modo sono simmetrici. Ed è interessante che la natura dispieghi certi tipi di simmetria negli oggetti del mondo intorno a noi. L'oggetto più simmetrico che si possa immaginare è forse la sfera, e la natura è piena di sfere - le stelle, i pianeti, le goccioline d'acqua delle nubi. I cristalli rinvenuti nelle rocce presentano molti tipi di simmetria, il cui studio ci rivela aspetti importanti della struttura dei solidi. Perfino il regno animale e quello vegetale presentano un certo grado di simmetria, benché la simmetria di un fiore, o di un'ape, non sia altrettanto perfetta o fondamentale quanto quella di un cristallo. Ma la cosa che qui più ci interessa non è tanto il fatto che spesso gli *oggetti* naturali siano simmetrici; noi desideriamo piuttosto esaminare alcune simmetrie, ancora più notevoli, dell'universo stesso - simmetrie presenti nelle *leggi fondamentali* che governano il funzionamento del mondo fisico.

Tab. 1 Operazioni di simmetria.

Traslazione spaziale
Traslazione temporale
Rotazione di un angolo prestabilito
Moto rettilineo uniforme (trasformazione di Lorentz)
Inversione temporale
Riflessione spaziale
Scambio di atomi identici o particelle identiche
Fase della meccanica quantistica
Materia-antimateria (coniugazione di carica)

Innanzitutto, che cos'è la simmetria? E in che senso può essere «simmetrica» una *legge* fisica? Il problema è interessante. Abbiamo già osservato come Weyl avesse dato una buona definizione; in sostanza, diceva, una cosa è simmetrica se, dopo che l'abbiamo sottoposta a una certa operazione, resta uguale a prima. Un vaso, ad esempio, è simmetrico quando è fatto in modo che se lo guardiamo allo specchio, oppure lo giriamo, ci appare uguale a prima. La questione di cui vogliamo parlare è: quali operazioni possiamo compiere riguardo a fenomeni fisici, o a una situazione sperimentale, senza variare il risultato? Nella tabella 1 sono elencate le operazioni conosciute rispetto alle quali vari fenomeni fisici restano immutati.

Simmetria nello spazio e nel tempo

Per cominciare, potremmo cercare di «traslare» il fenomeno nello spazio. Se facciamo un esperimento in un certo luogo e poi costruiamo una seconda apparecchiatura in un altro posto (oppure vi trasferiamo l'originale), allora, qualunque cosa sia accaduta nella prima apparecchiatura si ripeterà identicamente, nel medesimo ordine temporale, nella seconda se avremo ricreato le stesse condizioni, con la dovuta attenzione alle restrizioni a cui abbiamo accennato: che vengano rimossi tutti quei fattori ambientali che impediscono un uguale funzionamento. Come stabilire di quali cose si dovrà tener conto? Ne abbiamo già parlato, e non torneremo più su questi particolari. Oggi si pensa, analogamente, che neppure uno *spostamento temporale* influisca sulle leggi fisiche. (Ciò vale almeno *per quanto ne sappiamo oggi* - tutte queste considerazioni necessitano di tale premessa). In altre parole, se costruiamo un certo apparecchio e lo mettiamo in funzione in un certo istante - mettiamo, alle 10:00 di giovedì - e poi ne costruiamo uno uguale e lo mettiamo in funzione tre giorni dopo, nelle identiche condizioni, i due apparecchi compiranno gli stessi movimenti allo stesso modo in funzione del tempo, indipendentemente dall'istante d'inizio - sempre che i fattori ambientali vengano modificati anch'essi in modo appropriato. Che cosa significa questa simmetria? Significa - ovviamente - che l'aver acquistato azioni della General Motors tre mesi fa o acquistarle oggi non

fa alcuna differenza!

Dobbiamo fare attenzione anche alle differenze geografiche, perché le caratteristiche della superficie terrestre possono variare. Così, ad esempio, se misuriamo il campo magnetico in una certa regione e poi spostiamo la nostra apparecchiatura in qualche altra regione, non è detto che dia lo stesso risultato, perché magari il campo è diverso - ed è diverso in quanto è associato alla Terra. Possiamo immaginare che, spostando solidalmente la Terra con l'apparecchiatura, il risultato resterebbe invariato. Un altro aspetto da noi discusso in maniera particolarmente approfondita è quello delle rotazioni nello spazio: se lo ruotiamo di un certo angolo, un macchinario funzionerà altrettanto bene, a patto di ruotare contemporaneamente ogni oggetto connesso al suo funzionamento. In effetti, nel primo capitolo la simmetria di rotazione è stata esaminata alquanto in dettaglio, e per trattarla nel modo più limpido possibile abbiamo introdotto un metodo noto come *analisi vettoriale*. A un livello più avanzato avevamo visto un altro tipo di simmetria, quella rispetto al moto rettilineo uniforme. Questo significa - ed è una cosa davvero notevole - che se un'apparecchiatura funziona in un certo modo e noi la mettiamo su un'auto, dove sono state riprodotte tutte le condizioni ambientali che potrebbero influire sul funzionamento dell'apparecchiatura, e l'auto si muove in linea retta a velocità costante, all'interno dell'auto non c'è alcuna differenza per quanto riguarda i fenomeni: tutte le leggi fisiche conservano la stessa forma. Potremmo anche esprimerci in modo più tecnico dicendo che le equazioni della fisica sono invarianti rispetto alle *trasformazioni di Lorentz*. Infatti, fu proprio lo studio del problema della relatività a focalizzare l'attenzione degli scienziati sulla simmetria delle leggi. Finora abbiamo parlato esclusivamente di simmetrie di tipo geometrico (tempo e spazio sono più o meno la stessa cosa), ma vi sono anche simmetrie di genere diverso. Ce n'è una, ad esempio, che esprime il fatto che un atomo può essere sostituito da un altro dello stesso tipo. Ciò significa, fra le altre cose, che *esistono* atomi dello stesso tipo. È possibile, cioè, trovare gruppi di atomi tali che non fa differenza se due qualunque di essi si scambiano tra loro - quegli atomi sono identici. E così, qualunque cosa faccia un atomo di ossigeno di un certo tipo, la farà pure un altro atomo dello stesso tipo. Si può dire: «Ma è ridicolo, questa è la *definizione* di atomi dello stesso tipo!». Sarà pure una definizione, ma ancora non ci dice se *esistano* «atomi dello stes-

so tipo»; *di fatto* ce ne sono molti, anzi moltissimi, e dunque asserire che è la stessa cosa se a un atomo ne sostituiamo uno uguale non è un'affermazione vuota. Le cosiddette particelle elementari di cui sono costituiti gli atomi sono anch'esse identiche nel senso citato: tutti gli elettroni sono uguali, tutti i protoni sono uguali, tutti i pioni positivi sono uguali, e così via. Affinché non si pensi, dopo questa lunga serie di esempi, che si possa fare praticamente qualunque cosa senza che i fenomeni cambino, diamo qualche esempio del contrario, tanto per mostrare dov'è la differenza. Poniamo che la domanda sia: «Le leggi fisiche sono invarianti rispetto a un cambiamento di scala?» e supponiamo di costruire una certa apparecchiatura e poi di costruirne un'altra che sia, in ogni sua parte, cinque volte più grande: funzioneranno esattamente allo stesso modo? In questo caso la risposta è *no*! Per esempio, la lunghezza d'onda della luce emessa da un gas di sodio chiuso in un certo contenitore non è cinque volte minore di quella della luce emessa da un volume di gas di sodio cinque volte maggiore: è esattamente uguale. Di conseguenza il rapporto fra la lunghezza d'onda e le dimensioni dell'emittente cambia. Altro esempio: ogni tanto su un giornale vediamo la foto di una grande cattedrale fatta di piccoli fiammiferi - straordinaria opera d'arte di un tale in pensione che passa il tempo a incollare fiammiferi uno sull'altro. È molto più elaborata e bella di una vera cattedrale. Ma proviamo a immaginare che questa cattedrale di legno venga invece costruita a dimensioni reali; in tal caso vedremmo dov'è il difetto: la costruzione avrebbe una vita effimera, crollerebbe su se stessa, perché i fiammiferi, a quella scala, non sarebbero abbastanza resistenti. Si potrebbe dire: «D'accordo, ma sappiamo pure che quando c'è un'influenza esterna, anch'essa deve variare in proporzione». Dato che si sta parlando della capacità di un oggetto di resistere alla forza di gravità, dovremmo innanzitutto considerare il modellino, quello fatto con fiammiferi veri, e la Terra reale: quel modellino è stabile. Passando alla cattedrale più grande, dovremmo prendere, insieme con essa, una Terra più grande; ma sarebbe anche peggio, perché la gravità sarebbe ancora più forte! Oggi naturalmente attribuiamo questa dipendenza dei fenomeni dalla scala alla natura atomica della materia: certo, se costruissimo un apparato tanto piccolo da contenere cinque atomi appena, non potremmo ingrandirlo e rimpicciolirlo a piacere. La scala di un singolo atomo non è affatto arbitraria: è ben definita. Il primo ad accorgersi che le leggi fisiche non restano

invariate nei cambiamenti di scala fu Galilei, il quale vide che la resistenza dei materiali non era in proporzione alle loro dimensioni e illustrò questa proprietà - che stavamo appunto discutendo a proposito della cattedrale di fiammiferi - disegnando due ossi: l'osso di un cane, nelle giuste proporzioni per sostenere il suo peso, e l'osso immaginario (grosso, massiccio, con proporzioni molto diverse) di un «supercane» dieci o cento volte più grande. Non sappiamo se Galilei fosse mai giunto alla conclusione che le leggi di natura debbono avere una scala ben definita, ma egli fu talmente colpito da questa scoperta da attribuirle la stessa importanza di quella delle leggi del moto; e infatti le pubblicò insieme nello stesso libro, dedicato a «due nuove scienze». ⁵

Un altro caso di asimmetria delle leggi fisiche è quello, ben noto, di un sistema in moto rotatorio uniforme, ove non valgono le stesse leggi di un sistema non soggetto a rotazione. Se facciamo un certo esperimento sulla Terra e mettiamo poi tutta l'apparecchiatura su un satellite e lo lanciamo nello spazio, e facciamo in modo che il satellite ruoti nel vuoto, tutto solo, a velocità angolare costante, l'apparecchiatura non funzionerà allo stesso modo perché, come sappiamo, i suoi componenti interni verranno spinti all'esterno dalle forze centrifughe, o di Coriolis, e via dicendo. Con il cosiddetto pendolo di Foucault, riusciamo a stabilire che la Terra gira senza nemmeno guardare «fuori».

E ora parliamo di una simmetria molto interessante che è ovviamente falsa, la *reversibilità temporale*. Apparentemente le leggi fisiche non possono essere reversibili nel tempo perché, come sappiamo, a scala macroscopica tutti i fenomeni ordinari sono irreversibili: «Il dito scorrendo scrive, e avendo scritto va oltre». ⁶ Per quanto possiamo dire, questa irreversibilità è dovuta al grandissimo numero di particelle coinvolte; se potessimo vedere le singole molecole non riusciremmo a capire in quale direzione si muove il meccanismo nel suo complesso. Detto in modo più preciso: costruiamo un apparato molto piccolo, nel quale sappiamo che cosa fanno i singoli atomi, che possiamo osservare nei loro moti a zigzag. Costruiamo poi un apparato uguale, che inizi il suo moto partendo dalla condizione fi-

⁵ G. Galilei, *Discorsi e Dimostrazioni Matematiche intorno à due nuove Scienze attenenti alla Meccanica & i Movimenti Locali*, Leida, 1638. Cfr. ediz. a cura di E. Giusti, Einaudi, Torino, 1990, p. 141 [N.d.T.].

⁶ Omar Khayyàm, *Rubàiyàt*, a cura di E. Fitzgerald, prima ediz., London, 1859, quartina LI [N.d.T.].

nale del primo, con tutte le velocità esattamente invertite: farà *la stessa serie di movimenti, ma nell'ordine opposto*. Detto in altro modo ancora: se giriamo un film sufficientemente dettagliato di tutti i meccanismi interni di un pezzo di materia e poi lo proiettiamo all'incontrario, nessun fisico sarà in grado di dire: «È contro le leggi della fisica, c'è qualcosa di sbagliato!». Naturalmente, se non distinguiamo tutti i dettagli la situazione sarà perfettamente chiara: vediamo l'uovo che casca sul marciapiede, il guscio che si spacca, e così via, e di sicuro diremo: «È un evento irreversibile, perché se proiettassimo il film all'indietro l'uovo si rimetterebbe insieme e il guscio tornerebbe intero - un'idea ridicola, ovviamente!». Ma se guardiamo i singoli atomi, le leggi ci appaiono del tutto reversibili. Certo, arrivare a questa scoperta è stato molto più difficile, ma, a quanto pare, a livello microscopico e fondamentale le leggi della fisica sono completamente reversibili nel tempo.

Simmetria e leggi di conservazione

Le simmetrie delle leggi fisiche sono già molto interessanti a questo livello, ma scopriremo che lo sono ancor di più nell'ambito della meccanica quantistica. Un fatto che molti fisici trovano ancora oggi sconcertante, una cosa stupenda e molto profonda, è che in meccanica quantistica - per una ragione che al livello della presente discussione non possiamo spiegare - *a ogni regola di simmetria corrisponde una legge di conservazione*. Tra leggi di conservazione e simmetrie delle leggi fisiche esiste cioè un legame preciso. Ma per il momento questo possiamo solo dirlo, e non cercheremo nemmeno di spiegarlo. In meccanica quantistica, ad esempio, la simmetria rispetto alle traslazioni nello spazio implica *la conservazione della quantità di moto*; la simmetria rispetto alle traslazioni temporali, *la conservazione dell'energia*; e l'invarianza rispetto alla rotazione, *la conservazione del momento della quantità di moto o momento angolare*. Tutte queste connessioni sono molto belle e interessanti - sono tra le cose più profonde e affascinanti di tutta la fisica. Fra l'altro nella meccanica quantistica vi sono simmetrie che non hanno un analogo classico, anzi non sono nemmeno descrivibili classicamente.

Ecco un esempio: se Ψ è la funzione d'onda di un certo processo, sappiamo che il quadrato del modulo di Ψ dà la probabilità che esso si verifichi. Ora, se qualcun altro facesse i suoi calcoli non con questa Ψ , ma con una Ψ' che ne differisse solo per un cambiamento di fase (basta prendere una qualsiasi costante Δ e moltiplicare la vecchia Ψ per $e^{i\Delta}$), troverebbe che il quadrato del modulo di Ψ , ossia la probabilità dell'evento, ha lo stesso valore:

$$\Psi' = \Psi e^{i\Delta}; \quad |\Psi'|^2 = |\Psi|^2. \quad (2.1)$$

Dunque le leggi fisiche non cambiano se la fase della funzione d'onda è variata di una costante arbitraria. È una nuova simmetria: le leggi devono essere tali che una variazione della fase non faccia differenza. Abbiamo appena ricordato che in meccanica quantistica per ogni simmetria c'è una legge di conservazione: e la conservazione connessa alla fase della meccanica quantistica sembra essere quella della *carica elettrica* - una faccenda davvero interessante!

Riflessioni speculari

La prossima questione, che ci terrà occupati per quasi tutto il resto del capitolo, è la simmetria rispetto alle *riflessioni nello spazio*. Le leggi fisiche sono invarianti rispetto alla riflessione? Mettiamola così: immaginiamo di costruire un congegno - per esempio un orologio - con un sacco di ingranaggi, quadranti e lancette; fa tic-tac, funziona, e ha dentro delle molle. Ora guardiamolo allo specchio; quale *aspetto* abbia non importa - non è questo il punto. Supponiamo di costruire un altro orologio, che riproduca esattamente l'immagine riflessa del primo - dove uno ha una vite con filettatura destra, metteremo nell'altro una vite con filettatura sinistra; dove c'è un 2 sul quadrante scriviamo 5; ogni molla si avvolgerà in un senso in un orologio e nel senso opposto nell'altro. Alla fine avremo due veri orologi che stanno l'uno all'altro come un oggetto alla sua immagine speculare, pur essendo - sottolineiamo - entrambi reali, materiali. E adesso la domanda: se i due orologi vengono fatti partire nelle stesse condizioni, con identica tensione delle molle, da quell'istante in poi

continueranno a compiere movimenti esattamente speculari? Questo è un problema di fisica, non di filosofia; e la nostra conoscenza intuitiva delle leggi della fisica ci suggerisce di sì. Dunque siamo inclini a pensare, almeno nel caso degli orologi, che l'invarianza per riflessione spaziale sia una delle simmetrie delle leggi fisiche, che scambiando ovunque «destra» e «sinistra» - ma per il resto lasciando tutto com'è - non riusciremmo a discernere la differenza. Supponiamo per un momento che le cose stiano davvero così: in tal caso, sarebbe impossibile, basandoci su qualche fenomeno fisico, distinguere fra «destra» e «sinistra», così come non vi è alcun fenomeno fisico che ci consenta di definire una determinata velocità assoluta. Per la simmetria delle leggi fisiche, sarebbe quindi impossibile definire in senso assoluto che cosa si intende con «destra» come opposto di «sinistra».

Naturalmente non è che il mondo *debba* essere simmetrico; per esempio, ricorrendo alla «geografia», siamo sicuramente in grado di definire la «destra». Se siamo a New Orleans e guardiamo verso Chicago, la Florida è alla nostra destra (se stiamo con i piedi per terra!). Con la geografia possiamo quindi definire «destra» e «sinistra». Ovviamente, non è detto che un sistema abbia la simmetria di cui stiamo parlando; la questione è se siano simmetriche le *leggi*, se sia contro le leggi fisiche l'ipotesi di una sfera come la Terra, ma con tutto, in superficie, rovesciato a sinistra, una sfera dove uno potrebbe ancora guardare verso una città come Chicago da un luogo come New Orleans, ma tutto fosse messo all'incontrario, per esempio con la Florida a sinistra. Chiaramente, l'idea di uno scambio destra-sinistra di tutte le cose non appare impossibile non sembra essere contro le leggi fisiche. La nostra definizione di «destra», inoltre, non dovrebbe dipendere dalla storia. C'è un modo molto semplice di distinguere la destra dalla sinistra: andare in un negozio di ferramenta e scegliere una vite a caso. È molto probabile che abbia una filettatura destra - non necessariamente, ma è molto più facile che sia destra che sinistra. Però dipende dalla storia, dalle convenzioni, o da come vanno le cose, e ancora una volta non sono in giuoco leggi fondamentali. Com'è facile capire, poteva anche accadere che tutti si mettessero a fare viti con filettatura sinistra! Così dobbiamo cercare di scoprire fenomeni in cui il carattere «destrorso» sia presente a livello fondamentale. La prima possibilità è offerta dalla luce polarizzata, il cui piano di polarizzazione ruota quando la luce attraversa, ad

esempio, dell'acqua zuccherata. Come abbiamo visto nel capitolo 33 (delle *Lectures on Physics*, vol. I) in una certa soluzione zuccherina il piano ruota verso destra; questo è un modo di definire la «destra», in quanto possiamo sciogliere nell'acqua un po' di zucchero - ed ecco che la polarizzazione va verso destra. Ma quello zucchero proveniva da organismi, e se cerchiamo di produrlo artificialmente scopriamo che *non* fa ruotare affatto il piano di polarizzazione! Se però in questo stesso zucchero artificiale mettiamo dei batteri (che se ne mangiano una parte) e poi li eliminiamo con una filtratura, scopriamo che resta ancora un po' di zucchero (quasi metà di quello iniziale) che ora *fa* ruotare il piano di polarizzazione, ma *nel senso opposto*! Sembra una gran confusione, ma è facile da spiegare.

Consideriamo un altro esempio: fra le sostanze presenti in tutti gli esseri viventi e fondamentali per la vita abbiamo le proteine, che sono catene di aminoacidi.

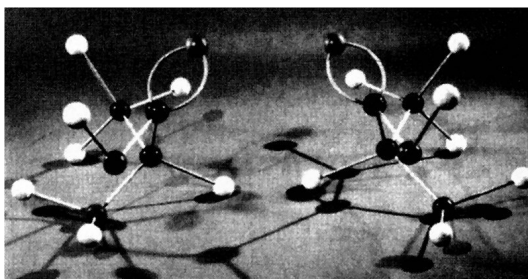


Fig. 9 - L-alanina (a sinistra) e D-alanina (a destra).

Nella figura 9 vediamo un modello di un aminoacido proveniente da una proteina; l'aminoacido è l'alanina e la sua struttura molecolare, se la proteina è prodotta da un essere vivente, è come nella parte (a) della figura. Ma se cerchiamo di sintetizzare l'alanina a partire da anidride carbonica, etano e ammoniaca (e lo *sappiamo* fare, non è una cosa complicata), scopriamo che nel processo vengono prodotte uguali quantità di questa molecola e dell'altra che si vede nella parte (b). La prima molecola si chiama *L-alanina* ed è una molecola «sinistrorsa» (levogira); l'altra, chimicamente uguale in quanto ha atomi dello stesso tipo e legati allo stesso modo, si chiama *D-alanina* ed è una molecola «destrosa» (destrogira). La cosa interessante è che quando sintetizziamo l'alanina in laboratorio otteniamo un miscuglio delle due varianti in parti uguali, mentre la vita utilizza solo il primo tipo. (Be', non proprio. Ogni tanto in certi organismi si scopre

un qualche uso speciale della D-alanina, ma è una cosa rarissima; e le proteine utilizzano solo la L-alanina). Ora, se le produciamo tutte e due e poi diamo il miscuglio a un animale che ama «mangiare» - consumare - l'alanina, l'animale, non potendo usare la D-alanina, userà solo la forma levogira, sinistrorsa. Così è stato per lo zucchero: dopo che i batteri hanno divorato quello che va bene per loro, è rimasto solo il tipo «sbagliato». (Lo zucchero levogiro è dolce, ma non ha lo stesso gusto di quello destrogiro). Sembrerebbe dunque che i fenomeni della vita ci permettano di distinguere la «destra» dalla «sinistra», o che ce lo permetta la chimica, dato che le due molecole, chimicamente, sono diverse. E invece no! Fin quando riusciamo a effettuare misure fisiche - dell'energia, della velocità delle reazioni chimiche, e via dicendo - le due molecole, a meno di una riflessione speculare, funzionano esattamente nello stesso modo. Una farà ruotare la luce verso destra, e l'altra la farà ruotare in misura uguale verso sinistra, e attraverso la stessa quantità di liquido. Da un punto di vista fisico una equivale all'altra e, per quanto ne sappiamo, le basi dell'equazione di Schrödinger richiedono che le due molecole si comportino in maniera esattamente simmetrica, di modo che la destra sia per l'una ciò che la sinistra è per l'altra. Eppure nella vita tutto è a senso unico! Si presume che la ragione sia questa. Si suppone che la vita, a un certo momento della sua evoluzione, si sia trovata, in qualche modo, in una certa condizione in cui le proteine di alcuni organismi erano formate solo da aminoacidi levogiri e tutti gli enzimi erano asimmetrici - nel vivente, ogni sostanza è sbilanciata, asimmetrica. Così, quando gli enzimi digestivi cercavano di trasformare certi costituenti chimici degli alimenti, una determinata sostanza si «incastrava» nell'enzima e un'altra no (come il piede di Cenerentola nella scarpetta, salvo che quello che mettiamo alla prova è un «piede sinistro»). Per quanto ne sappiamo, nulla vieterebbe in linea di principio di creare, ad esempio, una rana nella quale ogni molecola sia ribaltata e tutto sia tale e quale l'immagine speculare, «sinistrorsa», di una rana reale - una rana sinistrorsa. Per un po' questo animale funzionerebbe benissimo, ma non troverebbe di che nutrirsi perché se pure inghiottisse una mosca, i suoi enzimi non sarebbero fatti per digerirla. La mosca (a meno di passargliene una sinistrorsa) ha gli aminoacidi «sbagliati». Ma per quello che ne sappiamo, se ogni cosa venisse ribaltata i processi chimici e vitali continuerebbero esattamente allo stesso modo. Se la vita è in tutto e per

tutto un fenomeno fisico-chimico, l'unico modo per spiegare come mai le proteine si avvitinano tutte nello stesso senso è ipotizzare che in un tempo primordiale, per caso, delle molecole viventi si siano messe in moto, e che alcune si siano affermate. Da qualche parte, dovette comparire una molecola organica con un'asimmetria particolare, da cui ha avuto inizio l'evoluzione del carattere «destrorso» nella nostra particolare geografia. Quel particolare accidente storico fu unilaterale, e da allora la parzialità della natura si è propagata. Allo stadio a cui siamo, è probabile che le cose andranno avanti così per sempre: tutti gli enzimi digeriscono e fabbricano le cose giuste e quando l'anidride carbonica, il vapore acqueo e tutto il resto raggiungono le foglie delle piante, gli enzimi che costruiscono gli zuccheri producono molecole asimmetriche perché sono asimmetrici essi stessi. Un nuovo tipo di virus, o un nuovo organismo, potrebbe sopravvivere solo se fosse in grado di «mangiare» la materia vivente che già esiste - e quindi dovrebbe essere anche lui dello stesso tipo. Non c'è conservazione del numero delle molecole destrorse; una volta che se ne sia formata qualcuna, possono diventare sempre più numerose. Si può presumere quindi che, nel caso della vita, i fenomeni mostrino non già una mancanza di simmetria delle leggi fisiche, ma, caso mai, che tutte le creature esistenti sulla Terra hanno, nel senso appena spiegato, un'identica natura e ultimativamente un'origine comune.

Vettori polari e vettori assiali

Andiamo avanti. In fisica vi sono molte altre situazioni nelle quali abbiamo regole della mano «destra» e della mano «sinistra». Quando si introduce l'analisi vettoriale si imparano, in effetti, le regole della mano destra che servono per caratterizzare correttamente il momento angolare, il momento della forza, il campo magnetico, e via dicendo. Ad esempio, la forza che agisce su una carica in moto attraverso un campo magnetico è $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$. Ma in una situazione data, in cui $\mathbf{F}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{B}$ siano note, questa equazione basta a definire il carattere destrorso? In realtà, se facciamo un passo indietro e ci interroghiamo sull'origine dei vettori, ci accorgiamo che la regola della

mano destra non era niente più di una convenzione, un trucco. Le grandezze originarie - momenti angolari, velocità angolari e simili - in realtà non erano affatto vettori! In un modo o nell'altro, erano associate a un certo piano, e noi possiamo associarle a una direzione perpendicolare a quel piano solo perché lo spazio ha tre dimensioni. Delle due possibili direzioni scegliamo quella «destrorsa».

Così, se le leggi della fisica sono simmetriche, dovremmo concludere che se un diavoletto si intrufolasse in tutti i laboratori di fisica e sostituisse ovunque «destra» con «sinistra» in tutti i libri che contengono regole «della mano destra», e noi di conseguenza usassimo solo le regole «della mano sinistra», nelle leggi fisiche non cambierebbe nulla.

Facciamo un esempio. Vi sono due generi di vettori. Uno è rappresentato dai vettori «onesti», come può essere uno spostamento $\Delta \mathbf{r}$ nello spazio. Mettiamo che nel nostro apparato vi sia un pezzo qui e qualcos'altro là: allora in un apparato speculare vi saranno l'immagine del pezzo e l'immagine del qualcosa d'altro, e i rispettivi vettori dal «pezzo» al «qualcosa d'altro» saranno l'uno l'immagine speculare dell'altro (fig. 10).



Fig. 10 - Uno spostamento nello spazio e la sua immagine speculare.

La freccia del vettore cambia direzione, esattamente come l'intero spazio si rovescia. Chiamiamo *polari* i vettori di questo tipo. Il secondo tipo di vettore, che ha a che fare con le rotazioni, è di natura diversa. Supponiamo ad esempio che un oggetto, nello spazio tridimensionale, ruoti intorno al proprio asse come mostrato nella figura 11: se lo guardiamo in uno specchio lo vedremo compiere un movimento esattamente speculare alla rotazione originaria. Si conviene di rappresentare la rotazione nello specchio mediante un vettore definito con la stessa regola (della mano destra) impiegata per la rotazione reale: questo «vettore» non si rovescia per riflessione speculare, come accade nei vettori polari, ma risulta capovolto rispetto a questi ultimi e alla geometria dello spazio.

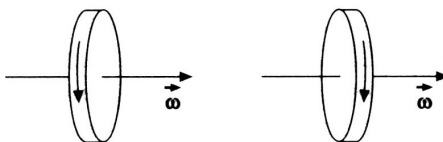
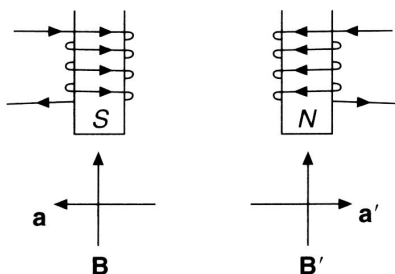


Fig. 11 - Un disco rotante e la sua immagine speculare. Da notare che il «vettore» velocità angolare non viene invertito.

Chiamiamo *assiali* i vettori di questo tipo. Ora, se vale in fisica la simmetria per riflessione, le equazioni debbono essere scritte in modo che cambiando di segno ogni vettore assiale e ogni prodotto esterno di vettori (il che corrisponde a una riflessione speculare) non accadrà nulla. Così, per esempio, l'equazione del momento angolare $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ resta la stessa: infatti, passando a un sistema di coordinate sinistrorso, $\mathbf{L}$ cambia di segno, mentre $\mathbf{r}$ e $\mathbf{p}$ non cambiano, ma cambia il segno del prodotto vettoriale, dato che siamo passati dalla regola della mano destra a quella della mano sinistra. Altro esempio: sappiamo che su una carica in moto in un campo magnetico agisce la forza $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$, ma se da un sistema destrorso passiamo a un sistema sinistrorso, dato che $\mathbf{F}$ e $\mathbf{v}$ sono vettori polari, il cambiamento di segno del prodotto dev'essere annullato da un cambiamento di segno di $\mathbf{B}$, e questo significa che $\mathbf{B}$ dev'essere un vettore assiale. In altre parole, la riflessione trasforma $\mathbf{B}$ in $-\mathbf{B}$. Così, se passiamo dal sistema destrorso al sistema sinistrorso, dobbiamo scambiare i poli magnetici nord e sud. Vediamo, in un esempio, come funziona la faccenda. Supponiamo di avere due magneti, come nella figura 12.



Uno ha un avvolgimento disposto in un certo modo, con la corrente che va in una certa direzione; l'altro si presenta come l'immagine speculare del primo - il filo è avvolto all'incontrano, vanno all'incon-

trano tutti i processi che hanno luogo nell'avvolgimento, e la corrente fluisce come si vede in figura. Ora, le leggi di generazione dei campi magnetici - che ufficialmente non conoscete ancora ma con ogni probabilità avete imparato nella scuola superiore - ci dicono che il campo magnetico è come si vede nella figura. In un caso abbiamo un polo magnetico sud, nell'altro la corrente va nel senso opposto e il campo magnetico è rovesciato, cioè abbiamo un polo magnetico nord. Come si vede, quando facciamo un'inversione da sinistra a destra dobbiamo cambiare il sud in nord! Ma non diamo troppa importanza a nord e sud - in fondo, sono anch'essi semplici convenzioni. Parliamo piuttosto dei *fenomeni*. Immaginiamo ora di avere un elettrone in un campo magnetico, che si muova verso la pagina. Se usiamo la formula della forza $q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ (ricordiamo che la carica è negativa), troviamo che l'elettrone devierà nella direzione indicata, conformemente alla legge fisica. Il fenomeno reale, quindi, è che c'è una bobina con una corrente che va in un senso ben determinato e l'elettrone devia in un certo modo. La fisica è questa, indipendentemente dalle etichette.

Ora rifacciamo l'esperimento allo specchio: se mandiamo l'elettrone nella direzione corrispondente, la forza - sempre che la calcoliamo con la stessa regola - si rovescia. E va benissimo così, perché i *moti* corrispondenti sono immagini speculari di quelli iniziali!

Qual è la mano destra?

Il dato da considerare, dunque, è che nello studio di un qualsiasi fenomeno vi sono sempre due regole della mano destra (o comunque un numero pari), per cui alla fine il fenomeno appare invariabilmente simmetrico. Di conseguenza non possiamo - per farla breve - distinguere la destra dalla sinistra se non siamo anche capaci di distinguere il nord dal sud. In verità, a noi sembra di *sapere* quale sia il polo nord di un magnete. Il polo nord dell'ago di una bussola, ad esempio, punta verso nord. Ma anche questa, naturalmente, è una proprietà locale, legata alla geografia della Terra; è come chiedersi da che parte si trovi Chicago - è irrilevante. Se avete osservato l'ago di una bussola, avrete notato che il polo che punta verso nord ha un

colore sull'azzurro: ma solo perché qualcuno l'ha verniciato così. Sono tutti criteri locali e convenzionali.

E però, se un magnete fosse fatto in modo che a guardarlo abbastanza da vicino gli si vedrebbero crescere dei peluzzi sul polo nord ma non sul polo sud, se vi fosse questa regola generale, o comunque un *qualsiasi* modo di distinguere il nord di un magnete dal sud, saremmo in grado di dire quale dei due avevamo in realtà, e *per la legge della simmetria rispetto alle riflessioni sarebbe la fine*. Per illustrare il problema in modo ancora più chiaro immaginerò di parlare per telefono con un marziano, o comunque con qualcuno che stia molto lontano. Non posso spedirgli, e quindi fargli esaminare, niente di fisicamente reale; mentre se gli potessi inviare per esempio un fascio di luce gliela manderei polarizzata circolarmente a destra e gli direi: «Questa è luce destrorsa, basta guardare da che parte gira». Ma non gli posso *dare* niente; posso solo parlargli. È lontano, oppure sta in un posto strano, e non può vedere nulla di ciò che vediamo noi; per esempio non posso dirgli: «Guarda l'Orsa Maggiore e osserva come sono disposte quelle stelle. Per "destra" intendo...». Gli posso solo parlare per telefono. E adesso provo a parlargli di noi. Ovviamente per prima cosa definisco i numeri, «Tic tic, *due*; tic tic tic, *tre*», così a poco a poco arriverà a capire un po' di parole, e poi andremo avanti. E dopo un po' magari diventeremo molto amici e lui chiederà: «Ma voi come siete fatti?», e io comincerò a descrivere gli umani e dirò: «Siamo alti un metro e ottanta», e lui dirà: «Un momento, quant'è un metro e ottanta?». È possibile spiegargli quanto è un metro e ottanta? Ma sicuro! Gli dico: «Hai presente il diametro dell'atomo di idrogeno? Noi siamo alti 17 000 000 000 atomi di idrogeno!». Si può fare perché le leggi fisiche sono invarianti rispetto ai cambiamenti di scala, per cui una lunghezza assoluta *riusciamo* a definirla. Così definisco le dimensioni del corpo, e gli spiego qual è la sua forma generale - che ha diramazioni con cinque sporgenze alle estremità, e così via - e lui mi segue, e alla fine descrivo il nostro aspetto esteriore, presumibilmente senza incontrare grandi difficoltà. Man mano che vado avanti lui si fa addirittura un modellino, mi dice: «Di sicuro siete bei tipi, ma dentro che cosa c'è?». E io comincio a descrivere gli organi interni finché arrivo al cuore, gli spiego bene che forma ha e gli dico: «Mettilo a sinistra». E lui fa: «Mmm... a sinistra?». Ora il problema è spiegargli da che parte sta il cuore senza che lui veda niente di quello che vedo io; e nessuno potrà mai spe-

dirgli un campione di quello che noi intendiamo per «destra», un oggetto destrorso standard. Posso farlo?

La parità non si conserva!

Si scopre che le leggi della gravitazione, dell'elettricità e del magnetismo, come pure le forze nucleari, soddisfano tutte il principio di simmetria rispetto alla riflessione; dunque non possiamo usarle, né loro né le loro conseguenze. Ma associato alle numerose particelle presenti in natura c'è un fenomeno chiamato *decadimento beta*, o *decadimento debole*. Tra i vari casi di decadimento debole, ce n'era uno, legato a una particella scoperta nel 1954 o giù di lì, che costituiva uno strano rompicapo. C'era una certa particella dotata di carica elettrica che decadeva in tre mesoni π , come mostra schematicamente la figura 13; per un po' questa particella fu chiamata mesone τ .

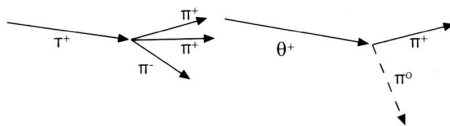


Fig. 13 - Schema del decadimento di una particella τ^+ e di una particella θ^+ .

Ma nella figura 13 vediamo anche un'altra particella, il mesone θ , che decade in *due* mesoni π uno dei quali, per la conservazione della carica, deve essere neutro. Ricapitolando, abbiamo una particella τ che decade in tre mesoni π e una particella θ che decade invece in due mesoni π . Ma ben presto si scoprì che la τ e la θ hanno massa quasi uguale; anzi, uguale e basta, nei limiti dell'errore sperimentale. Poi si trovò che impiegavano quasi esattamente lo stesso tempo per decadere, l'una in tre pioni e l'altra in due: la loro vita media era la stessa. Inoltre, ogni volta che si formavano, le proporzioni erano sempre le stesse, circa un 14% di particelle τ e un 86% di particelle θ . Basta un minimo di lucidità mentale per capire che si tratta della stessa particella, che noi produciamo uno stesso oggetto che può di-

sintegrarsi in due modi, e non due particelle diverse. Questo oggetto capace di decadere in due maniere distinte ha la stessa vita media, e la proporzione tra le due varianti è costante - corrisponde semplicemente al rapporto tra la probabilità di decadere, rispettivamente, nel primo e nel secondo modo.

Partendo dal principio della simmetria per riflessione della meccanica quantistica, si riuscì però a dimostrare (ma qui non posso assolutamente spiegare *come*) che una stessa particella *non poteva* disintegrarsi tanto in un modo quanto nell'altro. La legge di conservazione corrispondente al principio della simmetria per riflessione non ha un analogo classico, e così questo tipo di conservazione ha preso il nome di *conservazione della parità*. Era quindi per via della conservazione della parità, o meglio della simmetria per riflessione delle equazioni della meccanica quantistica dei decadimenti deboli, che una stessa particella non poteva decadere in entrambi i modi. Ci doveva essere allora una qualche coincidenza di massa, vita media, eccetera. Ma più si studiava la cosa più questa coincidenza appariva improbabile, e a poco a poco si fece strada il sospetto che la legge, così profonda, della simmetria della natura rispetto alle riflessioni potesse essere falsa.

Come risultato di questo apparente fallimento i fisici T.D. Lee e C.N. Yang proposero nuovi esperimenti di decadimento per controllare se in altri casi la legge fosse corretta. Il primo di tali esperimenti venne compiuto da Miss Chien-Shiung Wu della Columbia, e fu fatto come segue. Utilizzando un potente magnete a temperatura molto bassa, si scoprì che un certo isotopo del cobalto, che decade emettendo un elettrone, è magnetico, e se la temperatura è abbastanza bassa perché le oscillazioni termiche non li facciano agitare troppo, i magneti atomici si allineano nel campo magnetico. Così tutti gli atomi di cobalto si allineano nella direzione di questo forte campo magnetico; dopodiché decadono emettendo un elettrone. Miss Wu scoprì che quando il vettore **B** era diretto verso l'alto, la maggior parte degli elettroni venivano emessi verso il basso.

A un profano una simile osservazione non dice granché, ma chi sa valutare l'importanza dei problemi e le cose davvero interessanti del mondo vede subito che questa è una scoperta sensazionale. Quando poniamo atomi di cobalto in un campo magnetico estremamente intenso, vi sono più elettroni prodotti nel decadimento che vanno in giù che elettroni che vanno in su. Se riproducessimo tutto questo in

un esperimento speculare, con gli atomi di cobalto tutti schierati nella direzione opposta, questi sputerebbero i loro elettroni verso l'alto, non verso il basso: l'azione è *asimmetrica*. *Al magnete sono spuntati i peli!* Il polo sud di un magnete è tale che gli elettroni in un decadimento β tendono ad allontanarsene, e ciò distingue fisicamente il polo nord dal polo sud. Dopo questo esperimento ne vennero fatti molti altri: il decadimento del pione (π) in un muone (μ) e un neutrino (ν); il decadimento del muone in un elettrone e due neutrini e (ultimamente) della particella Λ in un protone e un pione; il decadimento della particella Σ ; e molti altri ancora. In effetti, in quasi tutti i casi in cui ci si poteva aspettare una violazione della simmetria rispetto alla riflessione, questa aveva effettivamente luogo. Fondamentalmente, a questo livello della fisica la legge della simmetria rispetto alla riflessione è falsa.

In breve, possiamo spiegare a un marziano da che parte sta il cuore. Basta dirgli: «Senti, fa' un magnete, metti l'avvolgimento, attacca la corrente, poi prendi un po' di cobalto e abbassa la temperatura. Se prepari l'esperimento in modo che gli elettroni vadano dai piedi alla testa, allora la corrente entra nell'avvolgimento a destra ed esce a sinistra». E così, ormai è possibile, con un esperimento di questo tipo, definire destra e sinistra.

Ma possiamo prevedere anche tantissime altre cose. Prima della disintegrazione, per esempio, lo spin - il momento angolare intrinseco - di un nucleo di cobalto è 5, mentre dopo è 4; l'elettrone se ne porta via un'unità, e c'è di mezzo anche un neutrino. Si vede facilmente che il momento angolare di spin dell'elettrone dev'essere allineato con la direzione del moto, e lo stesso vale per il neutrino - ma allora lo spin degli elettroni dovrebbe essere orientato più spesso a sinistra che a destra, ed è veramente così; la cosa è stata accertata da Boehm e Wapstra proprio qui al Caltech (ci sono anche stati alcuni esperimenti che hanno dato il risultato opposto, ma erano sbagliati). E a quel punto, naturalmente, si doveva trovare una legge per questa non-conservazione della parità. Qual è la regola che specifica quanto grave sarà questa violazione? È la seguente: la violazione ha luogo solo in reazioni molto lente, i cosiddetti decadimenti deboli; e quando si presenta, le particelle dotate di spin - elettrone, neutrino, e via dicendo - ruoteranno prevalentemente a sinistra. È una regola asimmetrica: associa un vettore polare velocità a un vettore assiale momento angolare e afferma che il momento angolare ha più probabi-

lità di essere opposto alla velocità che concorde.

La regola dunque è questa; ma per il momento noi non conosciamo affatto i suoi perché e percome. Come mai è la regola giusta, e quale ne è la ragione fondamentale? In che relazione sta con tutto il resto? L'esistenza di questa asimmetria ci ha talmente sconvolti che non siamo ancora riusciti a riprenderci quanto basta per capire quale significato abbia in rapporto alle altre leggi. Tuttavia l'argomento è interessante, moderno, e non ancora risolto, e dunque sembra giusto discutere qualcuno dei problemi che si porta dietro.

L'antimateria

Quando una simmetria va perduta, la prima cosa da fare è scorrere subito l'elenco di tutte le simmetrie note o postulate e chiederci se ne sia stata violata qualcun'altra. Ora, non abbiamo menzionato una voce del nostro elenco sulla quale dobbiamo per forza interrogarci, cioè la relazione fra materia e antimateria. Dirac aveva predetto che oltre all'elettrone doveva esserci anche un'altra particella, il cosiddetto positrone (poi scoperto da Anderson al Caltech), che è necessariamente in relazione con esso. Tutte le proprietà delle due particelle ubbidiscono a certe regole di corrispondenza: energia e massa sono uguali; le cariche sono opposte; e, cosa più importante di tutte, elettrone e positrone, quando si incontrano, possono annichilirsi a vicenda e liberare tutta la propria massa sotto forma di energia, per esempio raggi gamma. Il positrone è l'*antiparticella* dell'elettrone, dove particella e antiparticella hanno appunto queste caratteristiche. Dalle argomentazioni di Dirac era chiaro che a ogni altra particella dovesse corrispondere, analogamente, un'antiparticella. Il protone (p) ad esempio doveva avere il suo antiprotone, indicato col simbolo $\bar{p}$, con la stessa massa e carica negativa, e così via. Ma ancora una volta la cosa più importante era che protone e antiprotone, incontrandosi, si annichilissero a vicenda. Il motivo per cui insistiamo tanto su queste cose è che quando diciamo che esistono pure un neutrone e un antineutrone la gente non capisce: «Un neutrone è neutro, *come può* avere carica opposta?». Ma la regola dell'«anti» non prevede solo che sia opposta la carica: c'è tutto un insieme di

proprietà che si oppongono l'una all'altra. L'antineutrone per esempio si distingue dal neutrone perché se avviciniamo due neutroni resteranno due neutroni e basta, mentre se avviciniamo un neutrone e un antineutrone essi si annichilano reciprocamente, con una grande esplosione di energia e produzione di mesoni π , raggi gamma e quant'altro.

Ora, se abbiamo antielettroni, antiprotoni e antineutroni possiamo, in linea di principio, costruire antiatomi - non ne sono ancora stati fatti, ma in teoria è possibile. Un atomo di idrogeno, per esempio, ha al centro un protone e un elettrone che gira intorno all'esterno. Ma immaginiamo di essere riusciti a fabbricare, da qualche parte, un antiprotone e un positrone: questo gli gira intorno davvero? Vediamo: innanzitutto l'uno è elettricamente negativo e l'altro elettricamente positivo, e quindi i due si attraggono a vicenda come le corrispondenti particelle; le masse e tutto il resto sono uguali. Le equazioni sembrano implicare un principio di simmetria in base al quale se, per esempio, un orologio fosse fatto di materia ordinaria e poi lo rifacessimo uguale, ma di antimateria, questo secondo orologio funzionerebbe come il primo. (Naturalmente, se li mettessimo a contatto si annichilirebbero a vicenda, ma questo è un altro discorso).

Qui nasce subito un problema. Con la materia ordinaria possiamo costruire due orologi, uno «destrorso» e uno «sinistrorso». Anziché andare sul semplice potremmo farli con dei magneti, del cobalto, dei rivelatori che intercettano gli elettroni prodotti dal decadimento β e li contano - e ogni volta che questo succede la lancetta dei secondi scatta in avanti. Ma uno dei due orologi speculari riceverà meno elettroni, quindi andrà più lento; evidentemente è possibile costruire due orologi tali che quello sinistrorso non va d'accordo con quello destrorso. Bene; supponiamo allora di costruire, con la materia ordinaria, un orologio che chiameremo orologio «standard» o «destrorso». Dopodiché costruiamo, sempre con la materia, un orologio che chiamiamo «sinistrorso». Abbiamo appena scoperto che, in generale, *non* andranno con lo stesso ritmo, mentre prima di quella famosa scoperta fisica si pensava di sì! E si pensava pure che materia e antimateria fossero equivalenti; ossia che se avessimo costruito un orologio identico destrorso, ma di antimateria, avrebbe funzionato come l'orologio destrorso di materia ordinaria e che lo stesso sarebbe accaduto con l'orologio di antimateria sinistrorso. In altre parole, inizialmente si credeva che *tutti e quattro* questi orologi fossero

uguali; ora naturalmente sappiamo che la materia destrorsa e quella sinistrorsa non sono uguali - e dunque è presumibile che neppure l'antimateria destrorsa e sinistrorsa lo siano. La domanda più ovvia, a questo punto, è: come si abbinano, se pure si abbinano? La materia destrorsa si comporta come l'antimateria destrorsa, o come l'antimateria sinistrorsa? Gli esperimenti sul decadimento β , in cui si usano i positroni invece degli elettroni, indicano che l'abbinamento giusto è il secondo: la materia «destrorsa» funziona esattamente come l'antimateria «sinistrorsa».

E allora è vero, alla fin fine, che la simmetria fra destra e sinistra si conserva! Se costruissimo un orologio sinistrorso ma di antimateria, non di materia ordinaria, funzionerebbe come quello destrorso di materia ordinaria. Si dà il caso che nel nostro sistema di simmetrie vi siano due regole che non sono indipendenti, ma confluiscono in una nuova regola la quale dice che la materia destrorsa è simmetrica rispetto all'antimateria sinistrorsa.

Perciò se il nostro marziano è fatto di antimateria e gli spieghiamo che deve costruire un modello «destrorso» come il nostro, lo costruirà all'incontrario. Ma che cosa accadrà quando, dopo interminabili dialoghi, ci saremo insegnati a vicenda come costruire astronavi e ci incontreremo a metà strada nello spazio? Di certo saremo informati sulle rispettive abitudini, e così via, e dunque ci affrettteremo a stringerci la mano. Ma se lui porge la sinistra... attenzione!

Rotture di simmetria

E che dire di quelle leggi che sono *quasi* simmetriche? La cosa meravigliosa in tutto questo è che a una così ampia gamma di fenomeni importanti e di grande intensità - forze nucleari, fenomeni elettrici e persino forze deboli come la gravità -, su una estensione enorme della fisica, si applichino, a quanto pare, solo leggi simmetriche. D'altra parte, c'è questa piccola postilla che dice: «No, le leggi non sono simmetriche». Come mai la natura può essere quasi simmetrica, ma non perfettamente simmetrica? Come la mettiamo? E tanto per cominciare, conosciamo altri esempi? La risposta è sì, ve ne sono alcuni altri. Per esempio la parte nucleare della forza tra protone e pro-

tone, neutrone e neutrone o protone e neutrone è esattamente la stessa; esiste dunque una nuova simmetria nelle forze nucleari che rende interscambiabili neutrone e protone, ma è chiaro che non è una simmetria generale, perché la repulsione elettrica a distanza fra due protoni non esiste per i neutroni. L'affermazione che possiamo sempre scambiare un protone con un neutrone vale dunque solo con una buona approssimazione. Perché mai buona? Perché le forze nucleari sono molto più forti delle forze elettriche. Anche questa, quindi, è una «quasi» simmetria. Esistono dunque esempi di altre cose. La nostra mente tende a considerare la simmetria una forma di perfezione. È come l'antica idea dei greci che il cerchio fosse perfetto, per cui credere che le orbite dei pianeti non fossero circolari, ma solo approssimativamente circolari, era abbastanza orribile. La differenza tra circolare e quasi circolare non è affatto piccola; concettualmente è un salto fondamentale. In un cerchio c'è un segno di perfezione e simmetria che subito sparisce alla prima, minima deformazione - e allora è la fine del cerchio, che non è più simmetrico. Allora la domanda è perché sia solo *approssimativamente* un cerchio - una domanda molto più difficile. Le orbite dei pianeti, in generale, dovrebbero essere ellittiche, ma col tempo varie forze (mareali e d'altro genere) le hanno rese pressoché circolari. La questione è se qui vi sia sotto un problema di questo tipo. Il fatto è che se i cerchi fossero perfetti non vi sarebbe niente da spiegare, il che è chiaramente semplice. Ma dato che le orbite planetarie lo sono solo approssimativamente, c'è da spiegare moltissimo, e infatti si è visto che dietro c'è un complicatissimo problema di dinamica - e adesso ci tocca spiegare come mai le orbite planetarie sono quasi circolari invocando le forze mareali e altre cose.

E così dobbiamo spiegare di dove viene la simmetria. Perché la natura è solo approssimativamente simmetrica? Nessuno lo sa. Potremmo soltanto suggerire un aneddoto. A Nikko, in Giappone, vi è una porta famosissima che viene citata dalle guide come la più bella del paese. Risale all'epoca in cui era forte l'influenza dell'arte cinese, ed è una costruzione estremamente elaborata, con timpani e bellissime sculture e una profusione di colonne e teste di drago e figure di principi intagliate nei pilastri, e così via. Ma se si guarda più da vicino, si vede che nella decorazione di un pilastro c'è un piccolo elemento scolpito sottosopra. A parte questo particolare, il resto è completamente simmetrico. Ma se ne chiedete il motivo vi spiegano che

fu fatto in quel modo affinché gli dèi non fossero gelosi della perfezione umana. Sicché a bella posta fu inserito un errore, in modo che gli dèi non si adirassero con gli esseri umani.

Forse potremmo capovolgere il concetto e pensare che la vera spiegazione della imperfetta simmetria della natura sia un'altra: Dio fece le sue leggi approssimativamente simmetriche affinché noi non fossimo gelosi della Sua perfezione!

3 LA TEORIA DELLA RELATIVITÀ RISTRETTA

Il principio di relatività

Per oltre duecento anni si era creduto che le equazioni del moto enunciate da Newton fossero la descrizione corretta della natura, finché non si scoprì che quelle leggi contenevano un errore. Autore della scoperta fu, nel 1905, Einstein che però, insieme all'errore, trovò anche il modo di correggerlo.

La seconda legge di Newton, che abbiamo espresso mediante l'equazione

$$F = d(mv)/dt,$$

era accompagnata dal tacito presupposto che m fosse costante; oggi sappiamo che non è così e che la massa di un corpo aumenta con la velocità. Nella formula corretta di Einstein m ha il valore

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad , \quad (3.1)$$

dove la «massa a riposo» m_0 è la massa di un corpo immobile, e c è la velocità della luce, pari a circa 3×10^5 km·s⁻¹ (300 000 chilometri al secondo). Per chi desidera impararne solo quel tanto che basta a risolvere i problemi applicativi, nella teoria della relatività non c'è altro: ci si limita a cambiare le leggi di Newton introducendo un fattore di correzione per la massa. Dalla formula stessa si vede facilmente che in condizioni ordinarie l'incremento di massa è piccolissimo. Prendiamo pure la velocità di un satellite, che gira intorno alla Terra a circa 8 km/s: in questo caso $v/c = 8/300\,000$, un valore per il quale la formula dà una correzione di 1 su due-tre miliardi, pressoché impossibile da osservare. In realtà la validità della formula stessa è stata ampiamente confermata dall'osservazione di molti tipi di particelle, con velocità che arrivavano in pratica fino alla velocità della luce; ma è degno di nota che l'effetto, così piccolo in condizioni ordinarie, sia stato scoperto prima teoricamente che in un esperimento.

Empiricamente, se la velocità è abbastanza alta questo effetto è molto vistoso, ma non è così che è stato scoperto. È interessante quindi esaminare in che modo una combinazione di esperimenti e ragionamenti di fisica abbia messo in luce una legge che (all'epoca in cui venne scoperta) comportava una modifica tanto delicata. Furono in molti a contribuire alla scoperta, e il risultato finale fu la teoria di Einstein. Propriamente, le teorie einsteiniane sulla relatività sono due. Qui ci occuperemo di quella ristretta, che risale al 1905. Nel 1915 Einstein pubblicò un'ulteriore teoria, che chiamò «teoria generale della relatività», che estendeva la relatività ristretta alla legge di gravitazione. Ma qui non la discuteremo. Il principio di relatività fu enunciato per la prima volta da Newton come corollario alle sue leggi del moto: «I moti relativi dei corpi inclusi in un dato spazio sono identici sia che quello spazio giaccia in quiete, sia che il medesimo si muova in linea retta senza moto circolare».⁷ Ciò significa, ad esempio, che se un'astronave viaggia a velocità uniforme, per chi è a bordo dell'astronave tutti gli esperimenti e tutti i fenomeni che hanno luogo al suo interno avranno esattamente la stessa forma che avrebbero se l'astronave fosse ferma (a patto, naturalmente, di non guardare fuori). Il significato del principio di relatività è questo - un'idea abbastanza semplice. Resta da vedere se è vero che in tutti gli esperimenti condotti in un sistema in moto le leggi avranno la stessa forma che in un sistema in quiete. Esaminiamo dapprima se le leggi di Newton appaiono le stesse in un riferimento in moto.

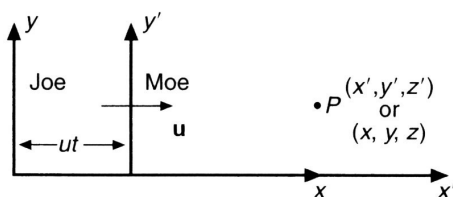


Fig. 14 - Due sistemi di coordinate in moto relativo uniforme lungo l'asse delle x .

Supponiamo che Moe si muova nella direzione x con velocità uniforme u e misuri la posizione di un certo punto (fig. 14); egli indicherà la «coordinata- x » del punto nel suo sistema di coordinate come x' .

⁷ Isaac Newton, *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, Londini, 1687 (trad. it. *Principi matematici della filosofia naturale*, a cura di A. Pala, UTET, Torino, 1977, p. 125) [N.d.T].

Joe invece sta fermo, ed effettua la misura della posizione dello stesso punto indicando la sua «coordinata- x » come x . La relazione tra le coordinate dei due sistemi è chiara dal diagramma. Dopo un tempo t l'origine di Moe si è spostata della distanza ut , e se inizialmente i due sistemi coincidevano si ha

$$\begin{aligned}x' &= x - ut \\y' &= y \\z' &= z \\t' &= t.\end{aligned}\tag{3.2}$$

Se nelle leggi di Newton sostituiamo le espressioni di questa trasformazione di coordinate (più precisamente le x, y, z, t in funzione di x', y', z', t'), scopriamo che tali leggi restano uguali nel sistema accettato; in altre parole, le leggi di Newton hanno la stessa forma in un sistema in moto e in un sistema in quiete, per cui è impossibile distinguere, mediante esperimenti di meccanica, se un sistema è o non è in movimento. Il principio di relatività è stato usato in meccanica per lungo tempo. Fu impiegato ad esempio, in particolare da Huygens, per trovare le leggi dell'urto elastico tra palle da biliardo (si veda la nostra discussione sulla conservazione della quantità di moto).⁸ Nel diciannovesimo secolo, le nuove indagini sui fenomeni elettrici, magnetici e luminosi aumentarono l'interesse per tali questioni. Una lunga serie di accurate ricerche, cui parteciparono molti studiosi, culminò nella scoperta, da parte di Maxwell, delle equazioni del campo elettromagnetico, che descrivevano tutti e tre i fenomeni in modo coerente e unitario. Quelle equazioni avevano però un grosso inconveniente, *non* sembravano ubbidire al principio di relatività stabilito per la meccanica. In altre parole, se le equazioni di Maxwell venivano trasformate mediante le (3.2), non avevano più la stessa forma. Di conseguenza, in un sistema in moto i fenomeni ottici ed elettrici sarebbero stati diversi da quelli in un sistema in quiete e avrebbero quindi potuto venire impiegati per determinare la velocità del sistema; in particolare, attraverso opportune misurazioni ottiche o elettriche, la sua velocità assoluta. Una delle conseguenze delle equazioni di Maxwell è che se, in seguito a una perturbazione, si generano onde luminose, esse si propagano in tutte le direzioni alla stessa velocità che, nel vuoto, è c , 300 000 km/s. Una seconda

⁸ Il riferimento è al capitolo 10 delle *Lectures on Physics*, vol. I [N.d.T].

conseguenza è che, se la sorgente luminosa è in moto, la luce si propaga ancora nello spazio con la stessa velocità. È come per il suono: anche in quel caso la velocità di propagazione delle onde è indipendente dal moto della sorgente.

Nel caso della luce, tutto ciò solleva un problema interessante: supponiamo di stare su un'auto che viaggia a velocità u e che la luce, venendo da dietro, ci superi alla velocità c . Derivando la prima delle (3.2) si ha

$$dx'/dt = dx/dt - u,$$

il che significa, stando alle trasformazioni galileiane, che la velocità della luce che ci sorpassa, per noi che la misuriamo dalla macchina, dovrebbe essere uguale non a c ma a $c - u$. Per esempio, se la macchina va a 160 000 km/s, la luce, che di suo va a 300 000 km/s, dovrebbe superarci, apparentemente, alla velocità di 140 000 km/s. In ogni caso, misurando dalla macchina la velocità della luce dovremmo essere in grado, se la trasformazione di Galilei vale anche per la luce, di determinare la velocità della nostra auto. Basandosi su questo principio generale, si è fatta una quantità di esperimenti per determinare la velocità della Terra; nessuno ha avuto successo: la velocità risultava invariabilmente nulla. Ora ne vedremo uno in dettaglio per spiegare esattamente che cosa è stato fatto e qual era il guaio - perché naturalmente un guaio, un errore nelle equazioni della fisica, c'era. Ma quale?

La trasformazione di Lorentz

Quando fu chiaro che in quel caso le equazioni della fisica non funzionavano più, la prima cosa che venne in mente agli scienziati fu che nelle equazioni di Maxwell dell'elettrodinamica - che all'epoca avevano solo vent'anni - vi fosse qualcosa di sbagliato. Pareva ovvio che lì stesse l'errore; bisognava dunque modificare le equazioni in modo tale che, sottoposte a una trasformazione di coordinate galileiana, soddisfacessero al principio di relatività. Senonché, i nuovi termini che andavano inseriti nelle equazioni portavano a ipotizzare

fenomeni elettrici che - quando si andava a verificarli sperimentalmente - risultavano del tutto inesistenti, e il tentativo fu così abbandonato. Un po' alla volta divenne chiaro che le leggi elettrodinamiche di Maxwell erano corrette, e che l'errore andava cercato in un'altra direzione.

Nel frattempo Hendrik Antoon Lorentz si era accorto di una cosa molto interessante e curiosa: quando nelle equazioni di Maxwell si eseguivano queste sostituzioni

$$\begin{aligned}x' &= \frac{x - ut}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \frac{t - ux/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}\end{aligned}\tag{3.3}$$

le equazioni trasformate avevano la stessa forma! Le (3.3) sono note come *trasformazione di Lorentz*. Einstein, seguendo un suggerimento avanzato in origine da Poincaré, propose allora che *tutte le leggi fisiche* dovessero essere tali da *restare invariate sotto una trasformazione di Lorentz*. In altri termini, a dover essere cambiate erano le leggi della meccanica, non quelle dell'elettrodinamica. Come modificheremo le leggi di Newton in maniera che *esse pure* restino invariate sotto una trasformazione di Lorentz? Se è questo il nostro obiettivo, dobbiamo riscrivere le equazioni newtoniane in modo che soddisfino le condizioni loro imposte. Si è visto che per questo basta sostituire la massa m con l'espressione (3.1). Una volta apportata questa modifica, le leggi di Newton concordano con quelle dell'elettrodinamica. Se dunque usiamo la trasformazione di Lorentz, confrontando le misure di Joe e di Moe non riusciremo mai a scoprire se l'uno o l'altro sia in moto, perché tutte le equazioni avranno la stessa forma in entrambi i sistemi di coordinate. Tuttavia, mentre la trasformazione di coordinate di Galilei sembra essere evidente, quella di Lorentz appare alquanto singolare. Che cosa significa rimpiazzare l'una con l'altra? È logicamente e sperimentalmente possibile che sia corretta la nuova trasformazione e non la vecchia? Per scoprirlo non basta studiare le leggi della meccanica. Per capire la trasformazione di Lorentz, anche noi, come Einstein, dovremo riesa-

minare le nostre idee di spazio e tempo. La discussione di questi concetti e delle loro implicazioni nella meccanica prenderà un po' di tempo, ma premetto che non sarà fatica inutile, dato che i risultati si accordano con l'esperienza.

L'esperimento di Michelson-Morley

Come ho ricordato, furono fatti vari tentativi per determinare la velocità assoluta della Terra attraverso l'ipotetico «etere» che si supponeva pervadesse tutto lo spazio. Il più famoso di questi esperimenti venne effettuato da Michelson e Morley nel 1887. Occorsero diciotto anni prima che l'esito negativo dell'esperimento fosse spiegato, finalmente, da Einstein.

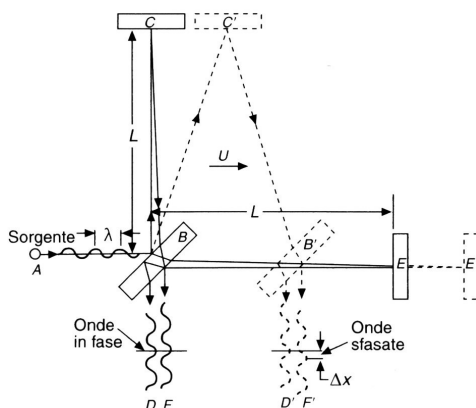


Fig. 15 - Schema dell'esperimento di Michelson-Morley.

L'esperimento di Michelson-Morley fu eseguito con un apparecchio simile a quello schematizzato nella figura 15: sostanzialmente comprende una sorgente luminosa *A*, una lastra di vetro parzialmente argentata *B* e due specchi *C* ed *E*, il tutto montato su una base rigida; gli specchi erano posti alla stessa distanza *L* da *B*. La lastra *B* divide il raggio di luce incidente in due raggi perpendicolari che proseguono il loro cammino fino agli specchi, dove vengono riflessi all'indietro verso *B*. Tornando in *B* si ricompongono come due fasci sovrapposti *D* e *F*. Se il tempo impiegato dalla luce per andare da *B* a *E*

e ritorno è uguale al tempo per andare da B a C e ritorno, i raggi D e F , emergendo da B , saranno in fase e si rinforzeranno a vicenda; se invece i due tempi sono lievemente diversi, le onde saranno leggermente sfasate, e si avrà un'interferenza. Se l'apparecchio fosse «a riposo» rispetto all'etere, i tempi dovrebbero essere esattamente uguali, ma se si muovesse verso destra a velocità u , nei tempi dovrebbe esservi una differenza. Vediamo perché. Calcoliamo innanzitutto il tempo che impiega la luce per andare da B a E e ritorno; chiameremo t_1 il tempo del viaggio di andata e t_2 il tempo del viaggio di ritorno. Ora, mentre la luce va da B a E , l'apparecchio si sposta di un tratto ut_1 , per cui la luce percorrerà una distanza pari a $L + ut_1$. Possiamo anche esprimere questa distanza come ct_1 , e quindi

$$ct_1 = L + ut_1, \text{ ovvero } t_1 = L/(c - u).$$

(Questo risultato è ovvio anche assumendo che la velocità della luce relativa all'apparato sia $c - u$, perché allora il tempo sarà la lunghezza L divisa per $c - u$). Il tempo t_2 può essere calcolato in modo analogo. Durante questo tempo la lastra B avanza di un tratto ut_2 ; al ritorno, la luce attraverserà una distanza $L - ut_2$, quindi

$$ct_2 = L - ut_2, \text{ ovvero } t_2 = L/(c + u).$$

Quindi il tempo totale è

$$t_1 + t_2 = 2Lc/(c^2 - u^2)$$

che, in vista di futuri confronti tra tempi, risulta più comodo scrivere così:

$$t_1 + t_2 = \frac{2L/c}{1 - u^2/c^2} \quad (3.4)$$

Calcoliamo adesso il tempo t_3 che la luce impiega per andare da B allo specchio C . Come prima, nel tempo t_3 C si sposta a destra di una distanza ut_3 , fino alla posizione C' , e contemporaneamente la luce copre la distanza ct_3 lungo l'ipotenusa BC' di un triangolo rettangolo, per il quale si ha

$$(ct_3)^2 = L^2 + (ut_3)^2$$

ovvero

$$L^2 = c^2 t_3^2 - u^2 t_3^2 = (c^2 - u^2) t_3^2,$$

da cui otteniamo

$$t_3 = L / \sqrt{c^2 - u^2}.$$

Nel viaggio di ritorno da C la distanza è la stessa, come si vede dalla simmetria della figura; di conseguenza anche il tempo è uguale, e il tempo totale sarà $2t_3$. Rimaneggiando un poco la forma possiamo scrivere

$$2t_3 = \frac{2L}{\sqrt{c^2 - u^2}} = \frac{2L/c}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \quad (3.5)$$

Finalmente siamo in grado di confrontare i tempi impiegati dai due raggi. Nelle espressioni (3.4) e (3.5) il numeratore è lo stesso e rappresenta il tempo che verrebbe impiegato se l'apparecchio fosse in quiete; i denominatori, nei quali il termine u^2/c^2 è molto piccolo, a meno che u non sia dell'ordine di grandezza di c , rappresentano invece le variazioni di questo tempo causate dal moto dell'apparecchio - e tali variazioni *non sono uguali*! Il tempo di andata e ritorno da B a C è un po' meno del tempo di andata e ritorno da B a E , e ci resta solo da misurare la differenza con precisione.

Qui sorge un piccolo problema tecnico: e se le due lunghezze L non fossero esattamente uguali? In effetti, è impossibile renderle perfettamente uguali; ma ci basta girare l'apparecchio di 90° , in modo che BC sia parallelo alla direzione del moto e BE perpendicolare. A quel punto le piccole differenze di lunghezza diventeranno irrilevanti; quel che cerchiamo è uno spostamento delle frange di interferenza quando ruotiamo l'apparecchio.

Nel loro esperimento, Michelson e Morley orientarono l'apparecchio in modo che la direzione BE fosse pressoché parallela (a determinate ore del giorno e della notte) al moto orbitale della Terra, che ha una velocità di circa 30 chilometri al secondo; dunque in determina-

te ore del giorno o della notte, e in determinate stagioni, la «velocità di trascinamento» dell'etere dovrebbe avere come minimo questo valore. L'apparecchio aveva una sensibilità più che sufficiente a rilevare un simile effetto, ma non venne osservata alcuna differenza nei tempi - il moto della Terra rispetto all'etere non poté essere rilevato. L'esperimento ebbe esito nullo.

Era una conclusione incomprensibile e alquanto allarmante. Lorentz, per primo, suggerì una via per uscire dal vicolo cieco, ipotizzando che i corpi materiali in moto si contraggano, e che tale accorciamento avvenga solo nella direzione del moto. Se un corpo in quiete ha lunghezza L_0 , quando si muove con velocità u parallelamente alla lunghezza, ha una lunghezza, indicata con $L_{||}$, data da

$$L_{||} = L_0 \sqrt{1 - u^2/c^2} \quad (3.6)$$

Quando si applica questa modifica all'interferometro di Michelson-Morley, la distanza L da B a C non cambia, mentre quella da B a E si accorcia di un fattore $\sqrt{1 - u^2/c^2}$. Perciò l'equazione (3.5) resta invariata, ma nella (3.4) la L va modificata in accordo con la (3.6). In tal modo si ottiene

$$t_1 + t_2 = \frac{(2L/c) \sqrt{1 - u^2/c^2}}{1 - u^2/c^2} = \frac{2L/c}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \quad (3.7)$$

Il confronto con la (3.5) mostra che $t_1 + t_2 = 2t_3$. Se l'apparecchiatura si contraesse nel modo indicato avremmo quindi una spiegazione della mancanza di effetti dell'esperimento di Michelson-Morley. L'obiezione che veniva rivolta all'ipotesi della contrazione era di essere artificiosa, introdotta a bella posta per aggirare il problema. D'altra parte, vari altri esperimenti volti a rivelare un vento d'etere andarono incontro a difficoltà analoghe; era come se la natura «congiurasse» contro tutti gli sforzi umani, e per ogni fenomeno che avrebbe dovuto permettere una misurazione di u ne introducesse un altro di nuovo tipo che lo vanificava.

Ma una congiura universale, faceva notare Poincaré, sarebbe anch'essa una legge di natura. Lo stesso Poincaré avanzò l'ipotesi che vi sia realmente una legge di natura di quel tipo e che nessun esperimento consenta di scoprire un vento d'etere o di determinare una

velocità assoluta.

Trasformazioni del tempo

Quando andiamo a verificare se l'idea di contrazione è in armonia con i dati di altri esperimenti, vediamo che tutto va bene purché si modifichino anche *le durate*, nel modo descritto dalla quarta delle (3.3). Questo perché il tempo t_3 del viaggio da B a C e ritorno non è lo stesso per chi esegue l'esperimento su una navicella spaziale in moto e per un osservatore in quiete che guarda la navicella da fuori: per il primo t_3 è semplicemente $2L/c$, mentre per il secondo è $(2L/c)/\sqrt{1-u^2/c^2}$ (eq. 3.5). In altri termini, quando l'astronauta si accende un sigaro, l'osservatore esterno vede tutti i suoi gesti più lenti del normale, mentre per chi sta nella navicella spaziale ogni cosa si muove alla solita velocità. Così, non solo devono accorciarsi le lunghezze, ma anche gli strumenti di misura del tempo, gli «orologi», devono apparentemente rallentare: quando l'uomo nella navicella vede che il suo orologio segna un secondo, per l'osservatore esterno sono passati $1/\sqrt{1-u^2/c^2}$ secondi.

Questo rallentamento degli orologi in un sistema in movimento è un fenomeno ben strano e merita una spiegazione. Per capire come stanno le cose dobbiamo osservare il meccanismo dell'orologio e vedere che cosa succede quando lo muoviamo; e poiché questo non è facile, prenderemo un tipo di orologio molto semplice - e neppure particolarmente intelligente - ma che in linea di principio può funzionare: un'asta graduata (un metro) con uno specchio ad ogni estremità. Quando tra gli specchi facciamo partire un segnale luminoso, la luce rimbalza su e giù, facendo un clic ogni volta che giunge, diciamo, nello specchio in basso - proprio come un normale orologio. Di questi congegni ne costruiamo due, esattamente della stessa lunghezza, li sincronizziamo facendoli partire insieme e da quel momento resteranno sempre sincroni perché hanno la stessa lunghezza e la luce si propaga sempre con velocità c . Poi ne diamo uno all'astronauta perché se lo porti sulla navicella, ed egli monta l'asta perpendicolarmente alla direzione del moto, ossia nella direzione y , co-

sicché la sua lunghezza non cambi. Ma come facciamo a sapere che le lunghezze perpendicolari al moto non cambiano? I due partecipanti all'esperimento possono accordarsi perché quando sono affiancati ciascuno faccia un segno sull'asta graduata dell'altro (entrambe nella direzione y). Per simmetria i due segni dovranno avere coordinate y e y' uguali - altrimenti quando si ritroveranno per confrontare i risultati uno dei segni sarebbe sopra o sotto l'altro, e quindi potremmo stabilire chi dei due si è mosso in realtà. Vediamo ora che cosa succede all'orologio in movimento. Prima di portarselo a bordo l'astronauta ha visto che era un buon orologio, ben tarato, e mentre viaggia non ci trova niente di strano. Se notasse qualche anomalia saprebbe di essere in moto - se in seguito al moto cambiasse qualcosa, non importa quale, egli capirebbe di non essere fermo. Ma il principio di relatività dice che in un sistema in moto uniforme questo è impossibile, quindi nulla è cambiato. E però l'osservatore esterno, quando guarda l'orologio nella navicella vede che la luce, nel suo rimbalzare da specchio a specchio, percorre «in realtà» un (animino a zigzag, perché l'asta per tutto il tempo si muove trasversalmente. Abbiamo già analizzato un moto simile a proposito dell'esperimento di Michelson-Morley: mentre l'asta si sposta orizzontalmente di un tratto proporzionale a u (fig. 16c), la luce percorre diagonalmente una distanza proporzionale a c e il tratto verticale sarà quindi proporzionale a $\sqrt{c^2 - u^2}$.

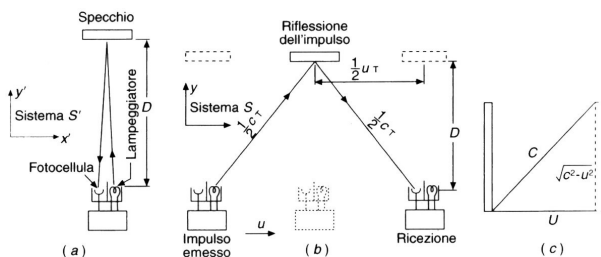


Fig. 16 (a) Un «orologio a luce» in quiete nel sistema S' . (b) Lo stesso orologio, in moto nel sistema S . (c) Illustrazione della traiettoria diagonale del raggio luminoso in un «orologio a luce» in moto.

In altre parole, per viaggiare da un estremo all'altro la luce impiega *più tempo* nell'orologio in movimento che in quello stazionario. Di conseguenza, il tempo apparente tra due clic successivi è più lungo, secondo la stessa proporzione che c'è fra l'ipotenusa e il cateto nella figura (questa è l'origine delle radici quadrate nelle nostre equazio-

ni). Dalla figura è anche chiaro che più grande è u più lento appare l'orologio in movimento. Ma se la teoria della relatività è corretta, la cosa non riguarda solo questo particolare tipo di orologio: ogni orologio, su qualunque principio si basi, sembrerebbe rallentare nella stessa misura. Non c'è bisogno di uno studio ulteriore per dirlo. Come mai è così?

Per rispondere a questa domanda supponiamo di avere altri due orologi fatti esattamente allo stesso modo - con ruote e ingranaggi, o magari basati sul decadimento radioattivo o su qualcos'altro - e di sincronizzarli esattamente con i primi due. Quando in un orologio a luce un raggio va avanti e indietro segnalando il suo arrivo con un clic, anche i nuovi modelli completano una qualche forma di ciclo, che annunciano simultaneamente con lampi, suoni, o altri segnali. Uno dei nuovi orologi va nella navicella spaziale insieme a quello del primo tipo. Chissà, magari *questo* orologio, anziché rallentare, continuerà a tenere lo stesso ritmo del suo gemello a terra, in disaccordo con l'altro modello nella navicella... Eh no! Se così fosse l'astronauta potrebbe usare lo sfasamento dei suoi due orologi per determinare la velocità della navicella, ma noi abbiamo supposto che ciò sia impossibile. *Non è necessario sapere nulla sul meccanismo del nuovo orologio che potrebbe indurre il rallentamento* - sappiamo già che, quale che ne sia la ragione, rallenterà come il primo. Ma se *tutti* gli orologi in movimento vanno più piano, se in ogni tipo di misura del tempo non si ottiene altro che un ritmo più lento, dovremo ammettere che, in un certo senso, è *il tempo stesso* a rallentare in una navicella spaziale. Lì dentro, tutti i fenomeni - le pulsazioni dell'astronauta, i suoi processi mentali, il tempo che ci mette ad accendere un sigaro, il tempo per crescere e invecchiare - devono rallentare in proporzione, perché l'uomo non può dire se è in movimento o meno. A volte i biologi e i medici dicono di non essere poi tanto sicuri che su una nave spaziale un cancro ci metterà più tempo a svilupparsi, ma dal punto di vista di un fisico moderno la cosa è pressoché sicura; in caso contrario potremmo usare il ritmo a cui il cancro si sviluppa per stabilire la velocità della navicella!

I mesoni μ o muoni ci forniscono un esempio molto interessante di rallentamento del tempo dovuto al moto. Queste particelle, che decadono spontaneamente dopo una vita media di $2,2 \times 10^{-6}$ secondi, sono presenti nei raggi cosmici, ma possono anche essere prodotte artificialmente in laboratorio; tra i mesoni di origine cosmica, alcuni

decadono nell'atmosfera, mentre altri lo fanno solo dopo avere incontrato un pezzo di materia che li arresta. È chiaro che nella sua effimera vita un muone, anche viaggiando alla velocità della luce, non può percorrere molto più di 600 metri. Eppure, benché i muoni vengano creati negli strati alti dell'atmosfera, a una quota di circa 10 chilometri, essi vengono trovati nei raggi cosmici che raggiungono i nostri laboratori a terra. Com'è possibile? La risposta è che queste particelle si muovono a velocità molto diverse, che qualche volta sfiorano quella della luce; e così, mentre dal loro punto di vista vivono solo 2 microsecondi, dal nostro punto di vista vivono ben più a lungo - quanto basta a raggiungere il suolo. Sappiamo già che il fattore di cui il tempo si allunga è $1/\sqrt{1-u^2/c^2}$; la vita media dei mesoni di diverse velocità è stata misurata molto accuratamente, e i valori ottenuti corrispondono strettamente alla formula.

Non sappiamo perché il mesone μ decada o quale meccanismo sia dietro a questo processo; sappiamo però che il suo comportamento soddisfa il principio di relatività. L'utilità del principio è proprio questa: ci permette di fare previsioni, anche su cose delle quali, altrimenti, non sappiamo granché. Così, prima di avere la minima idea della causa del decadimento del mesone possiamo prevedere che quando viaggia a $9/10$ della velocità della luce la durata apparente della sua vita media sarà $2,2 \times 10^{-6} \sqrt{1-9^2/10^2}$ secondi, e la cosa bella di questa previsione è che funziona.

La contrazione di Lorentz

Torniamo adesso alla trasformazione di Lorentz (3.3) e proviamo a capire un po' meglio le relazioni tra i sistemi di coordinate (x, y, z, t) e (x', y', z', t') , che chiameremo rispettivamente sistema S e S' , o di Joe e di Moe. Abbiamo già osservato che la prima equazione della trasformazione si basa sull'ipotesi dello stesso Lorentz che tutte le cose si contraggano nella direzione x : ma come possiamo dimostrare che questa contrazione ha effettivamente luogo? Nell'esperimento di Michelson-Morley, dobbiamo tener conto del fatto che il braccio *trasversale* BC non può, per il principio di relatività, cambiare di

lunghezza; ma il risultato nullo dell'esperimento richiede che i *tempi* siano uguali, e dunque per salvaguardare questo risultato nullo il braccio longitudinale *BE* dovrà accorciarsi di $\sqrt{1-u^2/c^2}$. Che cosa significa questo accorciamento per quanto riguarda le misurazioni di Joe e di Moe? Supponiamo che Moe, il quale viaggia in direzione *x* insieme al sistema *S'*, stia misurando la coordinata *x'* di un punto con un metro: egli riporta il regolo *x'* volte, e pensa che la lunghezza sia *x'* metri. Ma dal punto di vista di Joe, che sta nel sistema *S*, Moe sta usando un regolo più corto e in realtà ha misurato una distanza di $x' \sqrt{1-u^2/c^2}$ metri.

Perciò, se l'origine del sistema *S'* si è spostata di una distanza *ut*, l'osservatore in *S* dirà che il medesimo punto, misurato nelle sue coordinate, si trova alla distanza $x' \sqrt{1-u^2/c^2} + ut$, e quindi

$$x' = \frac{x - ut}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

che è la prima equazione della trasformazione di Lorentz.

Simultaneità

A causa della differenza fra le scale temporali, compare analogamente il radicale al denominatore anche nella quarta delle equazioni di Lorentz. Qui però il termine più interessante è quel ux/c^2 al numeratore, del tutto nuovo e imprevisto. Ma che significato ha? Un esame attento della situazione mostra che eventi che Joe, nel sistema *S*, vede accadere contemporaneamente in luoghi diversi *non* sono simultanei per Moe in *S'*. Si scopre che se, nel sistema *S*, un evento accade nel punto x_1 all'istante t_0 e un altro evento accade all'istante t_0 (lo stesso tempo) nel punto x_2 , i due istanti corrispondenti t'_1 e t'_2 nel sistema *S'* differiscono della quantità

$$t'_2 - t'_1 = \frac{u(x_1 - x_2)/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

Questa circostanza prende il nome di «difetto di simultaneità a distanza»; ma per chiarirci un po' le idee consideriamo il seguente esperimento. Supponiamo che un uomo in una navicella spaziale (il sistema S' in moto) abbia messo un orologio ad ogni estremità della navicella e voglia assicurarsi che i due orologi siano sincroni. Come farà a sincronizzarli? Vi sono vari modi. Una soluzione, che comporta un calcolo elementare, sarebbe quella di determinare innanzitutto il punto di mezzo tra i due orologi; da questa base viene lanciato un segnale luminoso che viaggerà alla stessa velocità in direzioni opposte, e arriverà a entrambi gli orologi, chiaramente, nello stesso istante. Per sincronizzare gli orologi possiamo quindi utilizzare l'arrivo simultaneo dei segnali, e supporremo senz'altro che l'uomo in S' segua questo metodo.

Vediamo se un osservatore nel sistema S sarebbe d'accordo con l'affermazione che i due orologi sono sincroni. L'uomo in S' ha ragione di credere che lo siano perché non sa di essere in movimento, ma l'uomo in S fa il seguente ragionamento: dato che la nave si sposta in avanti, l'orologio a prua si è allontanato dal segnale luminoso e la luce ha dovuto fare più di metà del cammino per raggiungerlo; quello a poppa invece andava incontro al segnale e quindi la luce ha percorso un cammino più breve. Perciò la luce ha raggiunto prima l'orologio a poppa, nonostante all'uomo di S' l'arrivo dei due segnali apparisse simultaneo. Conclusione: quando un astronauta ritiene contemporanei due eventi che accadono in due posizioni diverse, uguali valori di t' nel suo sistema di coordinate devono corrispondere a valori *diversi* di t nell'altro sistema!

Quadrivettori

Vediamo cos'altro riusciamo a scoprire nella trasformazione di Lorentz. È interessante osservare che la relazione fra le x e le t è formalmente analoga alla trasformazione fra le x e le y studiata nel primo capitolo a proposito delle rotazioni delle coordinate. Avevamo trovato che

$$\begin{aligned}x' &= x \cos \theta + y \sin \theta, \\y' &= y \cos \theta - x \sin \theta,\end{aligned}\tag{3.8}$$

ove le espressioni di x' di y' sono mescolanze delle vecchie coordinate x e y ; analogamente, nella trasformazione di Lorentz troviamo una nuova x' che è una mescolanza di x e t e una nuova t' che è una mescolanza delle stesse variabili. Pertanto la trasformazione di Lorentz è analoga a una rotazione, solo che è una «rotazione» *nello spazio e nel tempo* — uno strano concetto. Possiamo verificare questa analogia con la rotazione calcolando la grandezza

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2.\tag{3.9}$$

In questa relazione, i primi tre termini di ambo i membri rappresentano, nella geometria a tre dimensioni, il quadrato della distanza di un punto dall'origine (la superficie di una sfera), quadrato che resta immutato (è invariante) rispetto alle rotazioni degli assi delle coordinate. Analogamente, la (3.9) mostra che vi è una certa combinazione, che include il tempo, che è invariante rispetto a una trasformazione di Lorentz. L'analogia con una rotazione è così completa, ed è di un genere tale che i vettori - cioè grandezze che implicano «componenti» che si trasformano allo stesso modo delle coordinate spaziali e del tempo - sono utili anche a proposito della relatività. Consideriamo quindi un ampliamento della categoria dei vettori, finora dotati solo di componenti spaziali, per includere una componente temporale. In altre parole, è probabile che vi saranno vettori con quattro componenti; tre di queste saranno come le componenti di un vettore ordinario, ma ad esse se ne accompagnerà una quarta, che sarà l'analogo di una componente temporale.

Questo concetto verrà approfondito nei prossimi capitoli, dove vedremo che se si applicano le idee appena esposte alla quantità di moto, la trasformazione fornisce tre parti spaziali analoghe alle componenti ordinarie della quantità di moto, più una quarta componente, la parte temporale, che è l'*energia*.

Dinamica relativistica

Siamo ora pronti per indagare, più in generale, quale forma assumono le leggi della meccanica per effetto della trasformazione di Lorentz. [Fin qui abbiamo spiegato come cambiano la lunghezza e il tempo, ma non come si ottiene la nuova formula per m (eq. 3.1). Lo faremo nel prossimo capitolo]. Per illustrare le conseguenze della modifica di m per la meccanica newtoniana, partiamo dalla legge che dice che la forza è uguale alla rapidità di variazione della quantità di moto, ovvero

$$\mathbf{F} = d(m\mathbf{v})/dt.$$

la quantità di moto è ancora data da $m\mathbf{v}$, ma con la nuova m diventa

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} = \frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (3.10)$$

È questa la modifica di Einstein alle leggi di Newton. Con questa modifica, se azione e reazione restano uguali (e possono non esserlo in dettaglio, ma lo sono ancora nel lungo periodo), la quantità di moto si conserverà come prima, ma a conservarsi non sarà più la vecchia $m\mathbf{v}$ con la sua massa costante, ma la quantità (3.10), con la sua massa modificata. Con questo cambiamento il principio di conservazione della quantità di moto funziona ancora.

Ora vediamo come varia la quantità di moto con la velocità. Nella meccanica newtoniana essa è proporzionale alla velocità e, secondo la (3.10), in un ampio intervallo di velocità, purché piccole rispetto a c , le cose vanno quasi allo stesso modo anche nella meccanica relativistica: in tal caso, infatti, l'espressione sotto radice differisce di pochissimo da 1. Quando invece v è quasi uguale a c , il denominatore tende a zero, e la quantità di moto tende all'infinito.

Che cosa accade se un corpo è soggetto all'azione di una forza costante per molto tempo? Nella meccanica newtoniana continua ad acquistare velocità, finché diventa più veloce della luce. Nella meccanica relativistica questo è impossibile. In relatività il corpo acquista non velocità, ma quantità di moto, e questa può aumentare illimitatamente perché la massa aumenta. Dopo un certo tempo non vi

è praticamente più accelerazione nel senso di una variazione della velocità, ma la quantità di moto continua ad aumentare. Ovviamente, tutte le volte che la forza fa cambiare molto poco la velocità, diciamo che l'inerzia del corpo è molto grande, ed è precisamente quello che dice l'espressione relativistica della massa (3.10); che quando v è quasi uguale a c l'inerzia è grandissima. Ma ecco un esempio di questo effetto: per deflettere gli elettroni ad alta velocità nel sincrotrone del Caltech, abbiamo bisogno di un campo magnetico 2000 volte più intenso di quello che ci saremmo aspettati in base alle leggi di Newton. In altre parole, nel sincrotrone la massa degli elettroni è 2000 volte più grande di quella normale - pari a quella di un protone! Ma se m è 2000 volte più grande di m_0 , allora $1 - v^2/c^2$ dev'essere uguale a $1/4\,000\,000$, il che significa che v^2/c^2 differisce da 1 di una parte su $4\,000\,000$, o anche che v differisce da c di una parte su 2000, per cui gli elettroni sono molto vicini alla velocità della luce. Se gli elettroni partissero insieme alla luce dal sincrotrone diretti verso il Bridge Laboratory (distante circa 200 metri), chi arriverebbe prima? Ovviamente la luce, perché niente è veloce quanto la luce.⁹ Ma quanto prima? Questa è una domanda troppo difficile, ma possiamo dire di quanto la luce sarebbe in testa: circa un quarantesimo di millimetro, cioè un quarto dello spessore di un foglio di carta! E quando un elettrone va così veloce la sua massa è enorme, ma la sua velocità non può comunque superare quella della luce.

Vediamo ora qualche altra conseguenza della variazione relativistica della massa. Consideriamo il moto delle molecole in un piccolo serbatoio di gas: quando il gas viene riscaldato la velocità delle molecole cresce, e dunque aumenta anche la loro massa - il gas è più pesante. Nel caso di piccole velocità è possibile ricavare una formula approssimata per esprimere l'aumento di massa sviluppando in serie di potenze $m_0/\sqrt{1-u^2/c^2} = m_0(1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ per mezzo del teorema del binomio. Otteniamo

$$m_0(1 - v^2/c^2)^{-1/2} = m_0 \left(1 + \frac{1}{2}v^2/c^2 + \frac{3}{8}v^4/c^4 + \dots \right),$$

⁹ In realtà contro la luce visibile gli elettroni vincerebbero, per via dell'indice di rifrazione dell'aria. I raggi gamma se la caverebbero meglio.

dalla quale si vede chiaramente che quando è piccola la serie converge molto rapidamente e i termini dopo i primi due o tre hanno valori trascurabili. Perciò possiamo scrivere

$$m \simeq m_0 + \frac{1}{2} m_0 v^2 \left(\frac{1}{c^2} \right) \quad (3.11)$$

in cui il secondo termine al secondo membro esprime l'aumento di massa dovuto alla velocità molecolare. Quando la temperatura sale, anche v^2 aumenta proporzionalmente, cosicché possiamo dire che l'aumento della massa è proporzionale all'aumento della temperatura; ma poiché $1/2 m_0 v^2$ altro non è che l'energia cinetica nel vecchio senso newtoniano, possiamo anche dire che l'aumento di massa dell'intero volume di gas è uguale all'incremento di energia cinetica diviso per c^2 : $\Delta m = \Delta(E.C.)/c^2$.

Equivalenza di massa ed energia

L'osservazione precedente portò Einstein a supporre che la massa di un corpo - una volta stabilito che la massa è uguale al contenuto totale di energia diviso per c^2 - possa essere espressa da qualche formula più semplice della (3.1). Se moltiplichiamo l'equazione (3.11) per c^2 otteniamo

$$mc^2 = m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 v^2 + \dots \quad (3.12)$$

A sinistra abbiamo l'energia totale del corpo, e riconosciamo nell'ultimo termine a destra la sua energia cinetica ordinaria; Einstein interpretò la grande costante $m_0 c^2$ come una parte dell'energia totale del corpo, più esattamente come una componente intrinseca, la cosiddetta «energia a riposo».

Vediamo le conseguenze dell'aver supposto, con Einstein, che *l'energia di un corpo sia sempre uguale a mc^2* . Un primo risultato in-

interessante è che ne ricaviamo la formula (3.1) per la variazione della massa con la velocità, che finora avevamo soltanto postulato. Partiamo con il corpo in quiete, che ha l'energia $m_0 c^2$, e gli applichiamo una forza che lo mette in moto e gli dà energia cinetica; essendo cresciuta l'energia è cresciuta allora anche la massa - questo è implicito nell'ipotesi iniziale, e finché la forza è presente continueranno a crescere tutte e due. Nel capitolo 13 (delle *Lectures on Physics*, vol. I) abbiamo già visto che la rapidità di variazione dell'energia nel tempo è uguale alla forza per la velocità,

$$\frac{dE}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \quad . \quad (3.13)$$

e sappiamo anche (eq. (9.1), cap. 9 delle *Lectures on Physics*, vol. I) che $\mathbf{F} = d(m\mathbf{v})/dt$. Se mettiamo insieme queste due relazioni e la definizione di E , l'equazione (3.13) diventa

$$d \frac{(mc^2)}{dt} = \mathbf{v} \cdot \frac{d(m\mathbf{v})}{dt} \quad . \quad (3.14)$$

Ora vogliamo risolvere questa equazione per m . Per questo usiamo innanzitutto un artificio matematico, moltiplicando entrambi i membri per $2m$. La (3.14) diventa così

$$c^2 (2m) \frac{dm}{dt} = 2m \mathbf{v} \cdot \frac{d(m\mathbf{v})}{dt} \quad . \quad (3.15)$$

Dobbiamo eliminare le derivate, e possiamo riuscirci integrando ambo i membri. Si riconosce subito che $(2m) dm/dt$ è la derivata temporale di m^2 , e $(2m\mathbf{v}) \cdot d(m\mathbf{v})/dt$ è la derivata temporale di $(m\mathbf{v})^2$; perciò la (3.15) e la

$$c^2 \frac{d(m^2)}{dt} = \frac{d(m^2 v^2)}{dt} \quad (3.16)$$

sono la stessa equazione.

Se le derivate di due grandezze sono uguali, queste differiscono al più per una costante, e possiamo scrivere quindi

$$m^2 c^2 = m^2 v^2 + C. \quad (3.17)$$

Abbiamo però bisogno di definire la costante C in modo più esplicito. Poiché la (3.17) deve essere vera per ogni v , possiamo scegliere il caso particolare di $v = 0$, e dire che in tal caso la massa è m_0 ; sostituendo questi valori nella (3.17) otteniamo

$$m_0^2 c^2 = 0 + C.$$

Con questo valore di C , la (3.17) diventa

$$m^2 c^2 = m^2 v^2 + m_0^2 c^2. \quad (3.18)$$

Dividendo per c^2 e riordinando i termini arriviamo a

$$m^2 (1 - v^2/c^2) = m_0^2,$$

da cui

$$m = m_0 \sqrt{1 - v^2/c^2}. \quad (3.19)$$

Questa è la formula (3.1), ed è esattamente quel che occorre per la concordanza fra massa ed energia nell'equazione (3.12). Normalmente queste variazioni di energia corrispondono a variazioni di massa piccolissime, perché di solito non siamo in grado di generare molta energia a partire da una data quantità di materia; ma si può dimostrare che - per esempio - in una bomba atomica con un'energia esplosiva equivalente a 20 kiloton di TNT il residuo dell'esplosione, proprio a causa dell'energia liberata, pesa 1 grammo meno della massa iniziale del materiale attivo; il che vuol dire che l'energia liberata, in base alla relazione $\Delta E = \Delta(m c^2)$, aveva la massa di un grammo. Questa teoria dell'equivalenza tra massa ed energia ha avuto bellissime conferme in esperimenti di annichilazione della materia (in cui cioè la materia viene totalmente convertita in energia). Un elettrone e un positrone, entrambi con una massa a riposo m_0 , vengono fatti incontrare con velocità nulla. Quando si incontrano si di-

sintegrano e partono due raggi gamma, ciascuno con un'energia, misurata, m_0c^2 . Questo esperimento ci consente di determinare direttamente l'energia associata alla massa a riposo di una particella.

ENERGIA E QUANTITÀ DI MOTO RELATIVISTICHE

La relatività e i filosofi

In questo capitolo continueremo a discutere il principio di relatività di Einstein e Poincaré, nonché la sua influenza sulle idee della fisica e in altri campi del pensiero.

Poincaré enunciò il principio così: «Secondo il principio di relatività, le leggi dei fenomeni fisici devono essere le stesse per un osservatore fisso e per uno che abbia un moto di traslazione uniforme rispetto al primo, cosicché non abbiamo, né potremmo avere, alcun mezzo per distinguere se anche noi siamo trasportati da un simile moto».¹⁰ Quando discese nel mondo dei comuni mortali questa idea mise in grande agitazione i filosofi e soprattutto quelli «da salotto», quelli che dicono: «Ma è molto semplice: la teoria di Einstein dice che tutto è relativo!». E davvero c'è un numero incredibile di filosofi, non solo individui salottieri (ma per non mettere in imbarazzo la categoria continuerò a riferirmi ai «filosofi da salotto»), i quali dicono: «Che tutto è relativo è conseguenza della teoria di Einstein, e influisce profondamente sulle nostre idee». E magari aggiungono: «È stato dimostrato, in fisica, che i fenomeni dipendono dal nostro sistema di riferimento». Questi discorsi li abbiamo uditi innumerevoli volte, ma non è ben chiaro che cosa significhino; è probabile che per sistema di riferimento si intendessero in origine i sistemi di coordinate che usiamo nell'analisi della teoria della relatività. A quanto pare, dunque, l'idea che «le cose dipendono dal nostro sistema di riferimento» avrebbe avuto effetti molto profondi sul pensiero moderno. Ci si può chiedere perché, visto che, dopotutto, si tratta di un concetto talmente semplice che per scoprirlo non c'era davvero bisogno di imbarcarsi nelle astruserie della teoria della relatività della fisica. Che ciò che uno vede dipenda dal suo sistema di riferimento è sicuramente noto a chiunque vada a farsi una passeggiata, perché, incrociando un altro pedone, prima lo vede di fronte e poi di spalle; e gran parte di quella filosofia che dice di richiamarsi alla teoria della

¹⁰ H. Poincaré, *L'état actuel et l'avenir de la Physique mathématique*, in «Bulletin des Sciences Mathématiques», 28, 1904, pp. 302-24 [N.d.T.].

relatività non dice cose più profonde di: «Una persona ha un aspetto diverso a seconda che venga vista di fronte o di spalle». Anche la vecchia storia dell'elefante che diversi ciechi descrivono in modi diversi potrebbe essere un buon esempio di teoria della relatività dal punto di vista del filosofo. Sicuramente nella teoria della relatività vi sono cose più profonde della semplice osservazione che «una persona ha un aspetto diverso a seconda che sia vista davanti o di dietro». È ovvio che nella relatività c'è ben altro, perché *con essa possiamo fare previsioni ben definite* - sarebbe alquanto singolare, se riuscissimo a predire il comportamento della natura basandoci unicamente su un'osservazione così semplice. Ma c'è anche un'altra scuola di filosofi per i quali la relatività - in quanto dichiara l'impossibilità di determinare la nostra velocità assoluta senza osservare qualcosa di esterno - è motivo di profondo disagio. «Certo che uno non può misurare la propria velocità senza guardare all'esterno! Parlare di velocità di una cosa senza riferimenti esterni non ha alcun senso; e i fisici sono piuttosto stupidi ad aver pensato diversamente, ma adesso gli viene il dubbio che è proprio così. Se noi filosofi ci fossimo resi conto di quali erano i problemi dei fisici avremmo potuto stabilire immediatamente, con il puro ragionamento, che è impossibile sapere a quale velocità ci si muove senza osservare l'esterno, e avremmo dato un contributo straordinario alla fisica». Questi filosofi non desistono mai, e dalla loro posizione marginale pretendono di spiegarci questo o quello, ma non arrivano mai a capire davvero gli aspetti più sottili e profondi dei problemi. La nostra incapacità di rivelare il moto assoluto è il risultato di esperimenti, non il frutto di una semplice riflessione, come possiamo facilmente dimostrare. In primo luogo Newton credeva che uno che si muovesse in linea retta a velocità uniforme non poteva sapere a che velocità stava andando. In effetti, Newton fu il primo a enunciare il principio di relatività, e tra le sue proposizioni vi è la frase citata all'inizio del precedente capitolo. Come mai, allora, i filosofi non fecero questo gran chiasso sul fatto che «tutto è relativo»? Il motivo è che finché non venne elaborata la teoria di Maxwell non c'erano leggi fisiche che facessero pensare che *si potesse* misurare la propria velocità senza guardar fuori; ben presto si scoprì *sperimentalmente* che *non* era possibile.

Ora, è proprio *necessario* - assolutamente, definitivamente, filosoficamente - che non si sia in grado di dire a che velocità ci muoviamo senza guardare fuori? Una delle conseguenze della relatività fu la

nascita di una filosofia che diceva: «Si può definire solo quello che si può misurare! Dato che evidentemente non possiamo misurare una velocità senza vedere relativamente a che cosa la misuriamo, è chiaro che il concetto di velocità assoluta è *privo di significato*. È strano che i fisici non se ne siano accorti». *Ma è proprio questo il problema*: chiedersi se si possa o no *definire* la velocità assoluta è lo stesso che chiedersi se si possa o no scoprire sperimentalmente, senza guardar fuori, se ci stiamo muovendo. Detto in altro modo: se qualcosa sia o non sia misurabile è questione che non va decisa *a priori* col solo ragionamento. Solo l'esperimento può dirimerla. La velocità della luce è di 300 000 km/s, ma pochissimi filosofi accetterebbero in tutta tranquillità, come cosa per sé evidente, che se la luce percorrere 300 000 km/s dentro una macchina che viaggia a 160 000 km/s, la luce va a 300 000 km/s anche rispetto a un osservatore al suolo. Lo troverebbero sconcertante; sono proprio quelli che dicono «È ovvio!» a non trovare per nulla ovvio un fatto specifico, quando glielo sottoponiamo. Per finire, c'è anche una filosofia secondo la quale non potremmo scoprire *nessun* moto se non guardando fuori, ma in fisica questo è semplicemente falso. È vero che non possiamo percepire un moto *rettilineo uniforme*, ma se quest'aula *ruotasse* ce ne accorgeremmo di sicuro perché tutti verrebbero scagliati contro le pareti, anzi ci sarebbero effetti «centrifughi» di tutti i generi. E che la Terra ruota intorno al proprio asse possiamo stabilirlo anche senza osservare le stelle, per esempio col cosiddetto pendolo di Foucault. Dunque non è vero che «tutto è relativo»: solo una *velocità uniforme* non può essere scoperta senza osservare l'esterno; nel caso di una rotazione *uniforme* intorno a un asse fisso, invece, la cosa è possibile. Quando lo raccontate a un filosofo, rimane sconvolto per il fatto di non riuscire realmente a capire come stanno le cose perché a lui sembra impossibile che si possa rivelare la rotazione attorno a un asse senza guardare fuori. Comunque, se è abbastanza in gamba, dopo un po' potrebbe tornare e dire: «Ho capito. In realtà la rotazione assoluta non esiste, noi stiamo ruotando solo rispetto alle stelle. A causare la forza centrifuga, quindi, deve essere qualche influsso stellare».

E per quanto ne sappiamo, le cose stanno così. Oggi come oggi non abbiamo modo di stabilire se vi sarebbe una forza centrifuga se non vi fossero intorno stelle e nebulose. Non siamo stati in grado di fare l'esperimento di togliere di mezzo tutte le nebulose prima di misura-

re la nostra rotazione - dunque non lo sappiamo, punto e basta. E dobbiamo riconoscere che forse quel filosofo ha ragione. Così lui torna alla carica gongolante: «È assolutamente necessario che l'universo, in ultima analisi, sia come dico io; parlare di rotazione *assoluta* non significa niente, la rotazione è soltanto *relativa* alle nebulose». A quel punto noi gli ribattiamo: «Senti, amico, non è forse ovvio che un moto rettilineo uniforme *relativamente alle nebulose* non dovrebbe avere alcun effetto dentro un'automobile?». Ora che il moto non è più assoluto, ma è *relativo alle nebulose*, questa diventa una domanda misteriosa, alla quale solo l'esperimento può rispondere. Quali *sono*, allora, le ricadute filosofiche della teoria della relatività? Se ci limitiamo a considerare *le nuove idee e congetture* che ne sono derivate per i fisici, possiamo descriverne alcune come segue. La prima scoperta è stata, in sostanza, che persino idee accettate per lungo tempo e verificate con gran cura potrebbero non essere corrette. Ovviamente, scoprire dopo centinaia di anni che le idee di Newton erano errate fu sconvolgente. Beninteso, non che fossero sbagliati gli esperimenti, ma l'intervallo di velocità era talmente piccolo che gli effetti relativistici non potevano risultare evidenti. Oggi, comunque, abbiamo una visione molto più umile delle nostre leggi fisiche - *possono* essere sbagliate, sempre! In secondo luogo, se abbiamo un insieme di idee «strane» - come quella che, muovendosi, il tempo scorre più lentamente, e così via - non ha importanza che ci *piacciono o meno*. L'unica cosa che dobbiamo chiederci è se siano o no compatibili con i dati sperimentali. In altre parole, alle idee «strane» si chiede solo di concordare con gli *esperimenti*, e il solo motivo per cui discutiamo il comportamento di orologi e altre cose di questo tipo è che vogliamo dimostrare che la nozione di dilatazione del tempo, per quanto strana, è *coerente* col nostro modo di misurare il tempo. E per finire vi è un terzo suggerimento, che è un po' più tecnico ma si è rivelato straordinariamente utile nello studio di altre leggi fisiche: *considerare la simmetria delle leggi* o, più specificamente, ricercare in quali modi possano venir trasformate senza mutare di forma. Discutendo la teoria dei vettori abbiamo osservato che le leggi fondamentali del moto non cambiano quando ruotiamo il sistema di coordinate, e adesso stiamo imparando che non cambiano nemmeno quando cambiamo le variabili spaziali e quella temporale in un modo particolare, dato dalla trasformazione di Lorentz. Dunque l'idea di studiare le operazioni o le configurazioni che la-

sciano invariate le leggi fondamentali si è dimostrata molto utile.

Il paradosso dei gemelli

Per continuare la nostra discussione della trasformazione di Lorentz e degli effetti relativistici, esaminiamo il famosissimo «paradosso» di Pietro e Paolo, che si suppongono gemelli, nati contemporaneamente. Quando sono abbastanza cresciuti per pilotare un'astronave, Paolo parte per un viaggio nello spazio, volando velocissimo. A Pietro, che è rimasto a terra, sembra che tutti gli orologi di Paolo, il suo battito cardiaco, le sue reazioni e tutto ciò che lo riguarda siano più lenti. Naturalmente Paolo non nota niente di insolito, solo che se resta in viaggio per un po' di tempo e poi torna indietro sarà più giovane di Pietro. In effetti è così: è conseguenza della teoria della relatività ed è un fatto chiaramente dimostrato. I mesoni μ in moto vivono più a lungo, e così anche per Paolo la durata della vita si allunga. Tutto questo è un «paradosso» solo per chi crede che il principio di relatività valga per qualsiasi moto. Queste persone dicono: «Eh no! Dal punto di vista di Paolo, potremmo dire che era *Pietro* a muoversi; non dovrebbe essere lui, allora, a invecchiare più lentamente? Per simmetria, il solo risultato possibile è che quando si incontrano abbiano entrambi la stessa età». Ma perché si ritrovino e facciano il confronto, Paolo dovrà fermarsi al termine del viaggio e fare un confronto di orologi, o, più semplicemente, dovrà tornare indietro; e saprà di esser stato proprio lui a muoversi perché ha dovuto invertire la rotta, e quando ha invertito la rotta nell'astronave sono successe un mucchio di cose insolite - rombo di motori, oggetti che andavano a sbattere contro una parete, e così via -, mentre Pietro non ha avvertito nulla di strano.

La regola pertanto può venire enunciata così: sarà più giovane *l'uomo che ha sperimentato le accelerazioni*, che ha visto gli oggetti andare a finire contro una parete. È questa la differenza «assoluta» tra i due, ed è sicuramente corretta. Quando abbiamo spiegato che i mesoni μ in movimento vivono più a lungo, abbiamo fatto l'esempio del loro moto in linea retta attraverso l'atmosfera. Ma possiamo anche produrre mesoni μ in laboratorio e costringerli in una traiettoria

curva per mezzo di un magnete, e anche così vivranno più a lungo, ed esattamente quanto vivrebbero muovendosi in linea retta. Anche se nessuno ha mai organizzato un esperimento col fine dichiarato di eliminare il paradosso potremmo mettere a confronto un mesone in quiete con uno che ha fatto un giro completo, e sicuramente troveremmo che il secondo è durato più a lungo. Un esperimento simile, in realtà, non è mai stato eseguito; ma nemmeno è necessario, perché le tessere del mosaico collimano alla perfezione. Chi vuole a tutti i costi che di ogni singolo evento si dia una dimostrazione diretta sarà insoddisfatto, ma noi possiamo prevedere con buona sicurezza il risultato di un esperimento in cui sia Paolo a percorrere un'intera circonferenza.

Trasformazione delle velocità

La principale differenza fra la relatività di Einstein e quella di Newton sta nelle leggi di trasformazione che legano le coordinate spaziali e i tempi di due sistemi in moto relativo. La trasformazione corretta è quella di Lorentz, cioè

$$\begin{aligned}x' &= \frac{x - ut}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \frac{t - ux/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}\end{aligned}\tag{4.1}$$

Queste equazioni corrispondono al caso, relativamente semplice, in cui il moto relativo dei due osservatori è lungo il loro comune asse x . Ovviamente sono possibili altre direzioni del moto, ma la trasformazione di Lorentz più generale è piuttosto complicata perché mescola l'una all'altra tutte e quattro le grandezze. Dato comunque che questa forma, più semplice, racchiude tutti gli aspetti essenziali della relatività, continueremo a usarla.

Esaminiamo ora qualche altra conseguenza di questa trasformazio-

ne. Innanzitutto è interessante risolvere le equazioni al contrario. Che cosa vuol dire? Abbiamo un sistema di quattro equazioni lineari in quattro variabili incognite ed esse possono essere risolte inversamente per x, y, z, t in funzione di x', y', z' e t' . Il risultato è molto interessante perché ci dice come appare un sistema di coordinate «in quiete» visto da uno «in moto». Naturalmente, trattandosi di un moto relativo uniforme, l'osservatore «in moto» potrà dire, se lo desidera, che in realtà è l'altro a muoversi mentre lui è fermo. E dato che egli si muove nel verso opposto, dovrebbe ottenere la stessa trasformazione ma con velocità cambiate di segno. È appunto questo che troviamo quando lavoriamo sulle equazioni; nessuna contraddizione dunque, mentre se il risultato fosse diverso dovremmo veramente preoccuparci!

$$\begin{aligned} x &= \frac{x' + ut'}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \\ y &= y' \\ z &= z' \\ t &= \frac{t' + ux'/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \end{aligned} \quad (4.2)$$

Esaminiamo ora un altro problema interessante, quello della somma relativistica delle velocità. Si ricorderà che uno dei nostri primi rompicapi è stato che la luce viaggia a 300 000 km/s in tutti i sistemi, anche in moto l'uno rispetto all'altro, ma questo è un caso particolare di un problema più generale, che possiamo esemplificare così.

Supponiamo che un oggetto si muova a 160 000 km/s dentro una nave spaziale e che questa viaggi a sua volta a 160 000 km/s: a quale velocità si muove l'oggetto dal punto di vista di un osservatore esterno? Verrebbe da dire 320 000 km/s, ma questo è un valore che supera la velocità della luce - e la cosa è molto disturbante, perché stiamo supponendo che nessun oggetto sia più veloce della luce! Ma adesso riformuliamo il problema in modo più generale.

Supponiamo che l'oggetto nella navicella si muova con velocità v dal punto di vista dell'astronauta e che la navicella abbia a sua volta velocità u rispetto alla Terra: vogliamo sapere qual è la velocità v_x dell'oggetto rispetto all'osservatore al suolo. Naturalmente siamo ancora nel caso particolare in cui il moto è nella direzione x . Vi sarà una

trasformazione anche per le velocità in direzione y , o in qualsiasi direzione; all'occorrenza queste possono venir calcolate. Dentro la nave la velocità è v_x , il che significa che lo spostamento x' è

$$x' = v_x t'. \quad (4.3)$$

Ora ci resta solo da calcolare la posizione e il tempo, dal punto di vista di un osservatore esterno, per un oggetto con una relazione del tipo (4.3) tra x' e t' . Per questo sostituiamo semplicemente la (4.3) nella (4.2), ottenendo

$$x = \frac{v_x t' + u t'}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \quad (4.4)$$

dove però x è espressa in termini di t' , mentre per avere la velocità dal punto di vista dell'osservatore esterno dobbiamo dividere la distanza per il tempo come lo misura lui, non per il tempo dell'altra persona! Perciò dovremo calcolare anche il tempo visto dall'esterno, che è

$$t = \frac{t' + u(v_x t')/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}. \quad (4.5)$$

Il rapporto tra x e t sarà allora

$$v_x = \frac{x}{t} = \frac{u + v_x}{1 + u v_x/c^2}, \quad (4.6)$$

perché i due termini sotto segno di radice si elidono. È questa la legge che cercavamo: la velocità risultante, la «somma» delle due velocità iniziali non è la pura e semplice somma algebrica (sappiamo che non può esserlo - se lo fosse saremmo nei guai), ma la somma algebrica «corretta» dal divisore $1 + uv/c^2$. E adesso vediamo un po' che cosa succede. Immaginate di muovervi nella nave spaziale a una velocità pari a metà della velocità della luce e che la nave, per conto suo, vada a questa stessa velocità; dunque u è $1/2c$ e v è $1/2c$ ma nel denominatore uv è $1/4$, per cui

$$v = \frac{\frac{1}{2}c + \frac{1}{2}c}{1 + \frac{1}{4}} = \frac{4c}{5} .$$

In relatività dunque due «metà» non fanno uno, ma solamente $4/5$. Naturalmente possiamo sommare senza problemi le piccole velocità nel modo usuale, perché finché sono piccole in confronto alla velocità della luce il denominatore $1 + uv/c^2$ può essere trascurato; ma alle alte velocità le cose vanno in modo molto diverso, e molto interessante.

Prendiamo un caso limite e supponiamo, tanto per divertirci, che l'uomo nella navicella osservi *la luce stessa*. In altre parole $v = c$, e in più la navicella è in movimento. Quanto sarà veloce quella luce per l'uomo rimasto a terra? La risposta è

$$v = \frac{u+c}{1+uc/c^2} = c \frac{u+c}{u+c} = c .$$

Quindi, se qualcosa si muove alla velocità della luce nella navicella, essa avrà la velocità della luce anche per l'osservatore a terra! Ed è un'ottima cosa, perché in effetti la teoria della relatività doveva innanzitutto dare questo risultato - ed era davvero auspicabile che funzionasse! Naturalmente vi sono casi in cui il moto che si considera non ha la direzione del moto traslatorio del sistema. Ad esempio, nella navicella potrebbe esservi un oggetto che si sposta «verso l'alto» con velocità v_y rispetto alla navicella stessa, la quale procede «in orizzontale». Ebbene, basterà ripetere il procedimento ponendo le y in luogo delle x , e avremo $y = y' = v_y t'$, e quindi, se $v_x = 0$,

$$v_y = \frac{y}{t} = v_y' \sqrt{1 - u^2/c^2} . \quad (4.7)$$

Quindi una velocità trasversale non è più v_y , ma $v_y' \sqrt{1 - u^2/c^2}$. Siamo giunti a questo risultato mediante sostituzioni e combinazioni nelle equazioni della trasformazione, ma potremmo dedurlo direttamente dal principio di relatività per la seguente ragione (è sempre bene ri-

guardare per vedere se riusciamo a capire la ragione). Abbiamo già visto (fig. 16) il funzionamento di un possibile orologio a luce in movimento; vista dal sistema fisso la luce sembra procedere obliquamente alla velocità c , mentre nel sistema dell'orologio va semplicemente su e giù, sempre alla stessa velocità. Abbiamo inoltre trovato che nel riferimento fisso la *componente verticale* c_y della velocità è minore di c di un fattore $\sqrt{1 - u^2/c^2}$ (si veda l'eq. 3.3). Supponiamo ora che una particella materiale vada avanti e indietro in questo stesso «orologio» con velocità pari a $1/n$, con n intero, della velocità della luce (fig. 17).

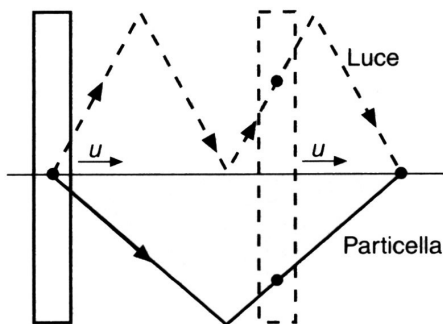


Fig. 17 - Le traiettorie di un raggio luminoso e di una particella in un orologio in movimento.

Allora, quando la particella sarà andata avanti e indietro una volta, la luce l'avrà fatto n volte, cioè ogni clic dell'orologio particellare coinciderà con l'ultimo di n clic dell'orologio a luce. *E questo dev'essere vero anche quando l'intero sistema è in moto*, perché il fenomeno fisico della coincidenza è una coincidenza in ogni riferimento. Di conseguenza, dato che la velocità c_y è minore della velocità della luce di un fattore dato dalla radice quadrata, anche la velocità v_y della particella dovrà essere minore della corrispondente velocità nella stessa proporzione, espressa da una radice quadrata! Ecco perché la radice quadrata compare in ogni velocità verticale.

Massa relativistica

Abbiamo imparato nell'ultimo capitolo che la massa di un oggetto aumenta con la velocità, ma non ne abbiamo data una dimostrazione, ossia non ne abbiamo data un'argomentazione analoga a quelle sul comportamento degli orologi. Siamo però in grado di dire che, come conseguenza della relatività, più qualche altra ipotesi ragionevole, la massa deve variare in questo modo. (Dobbiamo prevedere «qualche altra ipotesi» perché non possiamo dimostrare nulla se non c'è qualche legge della cui verità siamo certi in partenza, se vogliamo che le nostre deduzioni abbiano senso). Per non dover studiare le leggi di trasformazione della forza, analizzeremo un *urto*, cioè una cosa per la quale non ci serve conoscere nessuna di tali leggi, a parte la conservazione della quantità di moto e dell'energia. Inoltre faremo l'ipotesi che la quantità di moto di una particella in movimento sia un vettore e abbia la stessa direzione della velocità. Non supporremo invece, come Newton, che la quantità di moto sia il prodotto di una *costante* per la velocità, ma solo che essa sia una qualche *funzione* della velocità. Scriveremo quindi il vettore quantità di moto come prodotto di un certo coefficiente per il vettore velocità:

$$\mathbf{p} = m_v \mathbf{v}. \quad (4.8)$$

Scriviamo al piede del coefficiente una v per ricordarci che si tratta di una funzione della velocità, e conveniamo di chiamare questo coefficiente la «massa». Naturalmente, quando la velocità è piccola questa massa coinciderà con quella che misureremmo nei consueti esperimenti con basse velocità. Ora cercheremo di dimostrare che m_v dev'essere uguale a $m_0 / \sqrt{1 - v^2/c^2}$ in virtù del fatto che, per il principio di relatività, le leggi fisiche devono essere le stesse in ogni sistema di coordinate.

Supponiamo di avere due particelle identiche - ad esempio due protoni - che si muovono in linea retta l'una contro l'altra alla stessa velocità; la loro quantità di moto totale è zero. Ora cosa può accadere? Dopo l'urto le loro direzioni di moto dovranno essere diametralmente opposte, perché in caso contrario vi sarebbe un vettore quantità di moto totale non nullo, e la quantità di moto non sarebbe conservata.

Inoltre, dato che le due particelle sono assolutamente simili, dovranno avere la stessa velocità; anzi dovranno avere la stessa velocità che avevano inizialmente, poiché supponiamo che in urti di questo tipo l'energia si conservi. Perciò il diagramma di una collisione elastica, reversibile, sarà come nella figura 18a: tutte le frecce sono della stessa lunghezza e tutte le velocità sono uguali. Supporremo che sia sempre possibile allestire un esperimento di questo tipo, che l'angolo θ possa avere un valore qualsiasi e che le particelle che si scontrano possano avere qualsiasi velocità. Notiamo che, ruotando gli assi, questo stesso urto può esser visto in modo diverso; per comodità li ruoteremo davvero, così da avere una configurazione simmetrica rispetto all'asse orizzontale, come nella figura 18b.

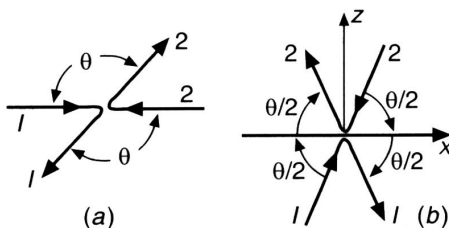


Fig. 18. Due diverse prospettive di un urto elastico tra particelle dello stesso tipo, aventi uguale velocità e direzioni opposte.

È lo stesso urto ridisegnato, solo con gli assi ruotati. E adesso arriva il trucco vero e proprio: immaginiamo di osservare quest'urto da un'automobile che si muova lungo l'asse orizzontale verso destra, con una velocità uguale alla componente sullo stesso asse della velocità di una delle particelle. Come sarà l'urto? Ci sembrerà che la particella 1 salga in verticale, perché non ha più la componente orizzontale e poi - sempre per la stessa ragione - che ridiscenda pure in verticale. L'urto in altri termini, apparirà come nella figura 19a. Ma la particella 2 andava nel senso opposto, e quando la incrociamo ci sembra procedere a una velocità spaventosa e con un'inclinazione minore, ma possiamo renderci conto che gli angoli prima e dopo l'urto sono *uguali*. Indichiamo con u la componente orizzontale della velocità della particella 2 e con w la velocità (verticale) della particella 1.

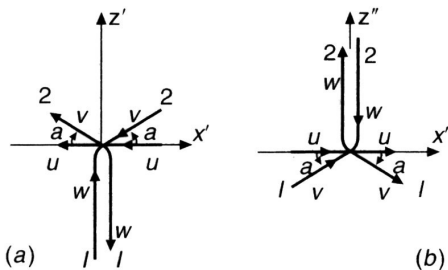


Fig. 19 Altre due immagini dell'urlo, visto da auto in movimento.

A questo punto il problema è: a quanto ammonta la componente verticale $u \operatorname{tg} \alpha$? Per ottenerla, potremmo applicare la legge di conservazione della quantità di moto in direzione verticale. Chiaramente, la componente orizzontale della quantità di moto si conserva: è uguale prima e dopo l'urto per entrambe le particelle, ed è zero per la particella 1. Di conseguenza, dovremmo applicare la legge di conservazione solo alla velocità verso l'alto $u \operatorname{tg} \alpha$. Ma *possiamo* ottenere quest'ultima semplicemente osservando lo stesso urto mentre ci muoviamo in senso opposto! Se l'osserviamo da una macchina che viaggia con velocità u verso sinistra, vediamo ancora lo stesso urto, però «capovolto», come mostra la figura 19b. Ora è la particella 2 ad andare su e giù con velocità w , mentre la particella 1 ha acquistato la velocità orizzontale u . Naturalmente, ora *sappiamo* quant'è $u \operatorname{tg} \alpha$: è $w \sqrt{1 - u^2/c^2}$ (si veda l'equazione 4.7). Sappiamo che la variazione della quantità di moto verticale della particella che si muove *verticalmente* è

$$\Delta p = 2m_w w$$

(c'è 2 perché va su e giù). La particella che si muove *diagonalmente* ha invece una velocità v , le cui componenti sappiamo ora che sono u e $w \sqrt{1 - u^2/c^2}$, e alla quale corrisponde la massa m_v . La variazione della quantità di moto *verticale* della particella è $\Delta p' = 2m_v w \sqrt{1 - u^2/c^2}$; infatti la componente della quantità di moto in una certa direzione è, per la legge (4.8) da noi ipotizzata, sempre uguale alla massa corrispondente al modulo della velocità per la componente della velocità in quella direzione. Perché la quantità di moto totale sia zero le quantità di moto verticali devono elidersi, e di conseguenza il rapporto tra la massa che si muove alla velocità v e quella che si

muove alla velocità w sarà

$$\frac{m_w}{m_v} \sqrt{1 - u^2/c^2} \quad . \quad (4.9)$$

Prendiamo il caso limite di una w infinitesima. Se w diventa piccolissima, è chiaro che v e u saranno praticamente uguali, per cui $m_w \rightarrow m_o$ e $m_v \rightarrow m_u$. Il grande risultato è che

$$m_u = \frac{m_o}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \quad . \quad (4.10)$$

È un esercizio interessante controllare se, posto che l'equazione (4.10) sia la formula corretta della massa, la (4.9) sia effettivamente vera per valori arbitrari di w . Osserviamo che la velocità v necessaria nell'equazione (4.9) può essere calcolata dal triangolo rettangolo di cateti u e $u \operatorname{tg} \alpha$:

$$v^2 = u^2 + w^2(1 - u^2/c^2).$$

Si troverà che la (4.9) è automaticamente verificata, anche se l'abbiamo usata solo per il caso limite di w molto piccola. Ammettiamo ora che la quantità di moto si conservi e che la massa dipenda dalla velocità nel modo stabilito dalla (4.10), e vediamo cos'altro possiamo concludere. Consideriamo il cosiddetto *urto anelastico*. Per semplicità supporremo che due oggetti dello stesso tipo, che si muovono l'un contro l'altro con uguale velocità w , si scontrino e restino attaccati, formando un nuovo oggetto immobile, come mostrato nella figura 20a.

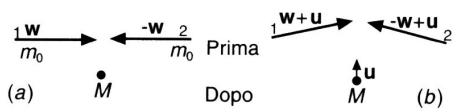


Fig. 20 - Due immagini di un urto anelastico tra due oggetti di massa uguale.

Ciascuno ha una massa m_w , che, come sappiamo, è uguale a $m_o/\sqrt{1 - w^2/c^2}$. Se assumiamo la conservazione della quantità di moto e

il principio di relatività, possiamo dimostrare un fatto interessante circa la massa del nuovo oggetto. Immaginiamo una velocità infinitesima u perpendicolare a w (possiamo farlo anche con valori finiti di u , ma così si capisce meglio) e supponiamo di osservare la collisione da un ascensore che scende alla velocità $-u$. Quello che vediamo è illustrato nella figura 20b. L'oggetto composto ha una massa M incognita. Prima dell'urto l'oggetto 1 ha una componente u di velocità verso l'alto e una componente orizzontale praticamente uguale a w , e lo stesso vale per l'oggetto 2. Dopo l'urto, abbiamo la massa M che si muove verticalmente con velocità u , molto piccola rispetto a quella della luce e piccola anche rispetto a w . Sappiamo che la quantità di moto deve restare uguale; vediamo quindi quant'è la sua componente verticale prima e dopo l'urto. Prima abbiamo $p \sim 2m_w u$; dopo, chiaramente, $p' = M_u u$, ove però M_u è praticamente uguale a M_0 perché u è molto piccola. Per il principio di conservazione della quantità di moto, p dev'essere uguale a p' e quindi

$$M_0 = 2m_w. \quad (4.11)$$

La massa dell'oggetto che si forma nell'urto anelastico di due oggetti uguali deve essere il doppio della massa dei singoli oggetti che si fondono. Qui si potrebbe dire: «Ma è naturale, è la conservazione della massa»; e invece non è così semplice, perché *le due masse iniziali sono aumentate*, sono più grandi di quelle che sarebbero se fossero in quiete, e danno alla M complessiva non il valore che avevano quando erano ferme ma *qualcosa di più*. Per incredibile che possa sembrare, perché la conservazione della quantità di moto funzioni quando due oggetti si fondono insieme nell'urto, la massa che formano deve essere più grande delle loro masse a riposo, anche se dopo l'urto la velocità è zero!

Energia relativistica

Nell'ultimo capitolo abbiamo dimostrato che, come risultato della dipendenza della massa dalla velocità e delle leggi di Newton, le variazioni dell'energia cinetica di un corpo prodotte dal lavoro totale

compiuto dalle forze agenti su di esso sono espresse da

$$\Delta T = (m_u - m_0)c^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} - m_0 c^2 \quad . \quad (4.12)$$

Ma siamo andati anche più in là, supponendo che l'energia totale fosse uguale alla massa totale per c^2 . Ora approfondiremo l'argomento. Supponiamo che si possano ancora «vedere», all'interno di M , i due oggetti di massa uguale che si sono scontrati. Ad esempio, un protone e un neutrone sono assemblati ma continuano a muoversi qua e là dentro M . Abbiamo scoperto che la massa di M non è $2m_0$ ma $2m_w$; d'altronde la somma delle masse a riposo iniziali è proprio $2m_0$, per cui la *massa in eccesso* deve essere uguale all'energia cinetica coinvolta nel sistema. Questo vuol dire che *l'energia ha un'inerzia*. Nel capitolo precedente abbiamo analizzato il riscaldamento di un gas e mostrato che, poiché le molecole gassose sono sempre in movimento e quando una cosa si muove è più pesante, se immettiamo nel gas dell'energia le sue molecole si muoveranno più rapidamente e quindi il gas stesso sarà più pesante. In realtà l'argomento è più generale, e la nostra discussione dell'urto anelastico mostra che c'è massa, a prescindere dal fatto che si tratti o no di energia *cinetica*. In altre parole, se due particelle si uniscono producendo energia potenziale, o di qualsiasi altra forma, e vengono rallentate da un percorso in salita, dalla resistenza di qualche forza interna o da una causa qualunque, resta comunque vero che la massa è l'energia totale che è stata immessa nel sistema. La conservazione della massa che abbiamo dedotto sopra equivale pertanto alla conservazione dell'energia, e quindi nella teoria della relatività non c'è posto per urti strettamente anelastici, che la meccanica newtoniana invece ammette. La meccanica newtoniana accetta senza problemi l'idea che due corpi possano scontrarsi formando un oggetto di massa $2m_0$ che non si distingue in nessun modo da quello che metteremmo insieme accostandoli lentamente; certo sappiamo, per la legge di conservazione dell'energia, che vi è più energia cinetica all'interno, ma in base alle leggi di Newton essa non incide sulla massa. Ora invece vediamo che una cosa del genere è impossibile, che l'energia cinetica coinvolta nell'urto rende l'oggetto più *pesante* - lo rende una cosa *diversa*. Quando accostiamo i due corpi dolcemente ne formiamo uno la cui

massa è $2m_0$, quando lo facciamo con violenza ne formiamo uno che ha massa più grande; e quando la massa è diversa, possiamo accorgercene. Nella relatività, quindi, la conservazione dell'energia si accompagna necessariamente alla conservazione della quantità di moto.

Questo fatto ha conseguenze interessanti. Supponiamo per esempio di avere un oggetto di massa M , già misurata, e che questo oggetto si spezzi in due parti uguali che schizzano via con la stessa velocità w e hanno quindi la stessa massa m_w . Immaginiamo ora che entrambi i pezzi vengano rallentati da un mezzo fino a fermarsi. A quel punto avranno massa m_0 ; ma quanta energia avranno ceduto al materiale? Per il teorema dimostrato prima, ciascuno avrà ceduto - sotto forma di calore, energia potenziale, o quant'altro - una quantità di energia pari a $(m_w - m_0)c^2$. Ma $2m_w = M$; per cui l'energia liberata è $E = (M - 2m_0)c^2$. Fu appunto questa l'equazione usata per stimare quanta energia sarebbe stata liberata, per fissione, nell'esplosione della bomba atomica. (In questo caso i frammenti, pur non essendo esattamente uguali, sono approssimativamente uguali). La massa dell'atomo di uranio era nota e misurata da tempo, com'era nota la massa degli atomi in cui si frantumava - iodio, xeno, e via dicendo. Qui non parliamo di masse di atomi in moto, ma di masse *a riposo*. In altre parole, sono note tanto M quanto m_0 ; basta quindi una semplice sottrazione per calcolare quanta energia sarà liberata se si riesce a spaccare M «a metà». Bastò questo perché il povero Einstein venisse battezzato da tutti giornali «il padre» della bomba. Naturalmente, tutto questo significava semplicemente che egli era in grado di prevedere quanta energia si sarebbe liberata, se gli avessimo detto quale sarebbe stato il processo. L'energia che si sarebbe sviluppata nella fissione di un atomo di uranio venne calcolata quando mancavano circa sei mesi alla prima verifica diretta, e appena quella energia venne liberata, qualcuno la misurò direttamente (lo sarebbe stata anche se la formula di Einstein non avesse funzionato), dopodiché la formula non fu più necessaria. Ovviamente, non si tratta di sminuire Einstein, quanto semmai di criticare i giornali, nonché una serie di ricostruzioni divulgative sui processi causali nella storia della fisica e della tecnologia. Il problema di come far sì che le cose procedano in modo efficiente e rapido è un'altra faccenda.

Quel risultato è ugualmente importante in chimica. Se per esempio riuscissimo a pesare la molecola di anidride carbonica e a confronta-

re la sua massa con quelle del carbonio e dell'ossigeno, potremmo scoprire quanta energia viene liberata quando questi due elementi si combinano per formare l'anidride carbonica. L'unico problema è che le differenze fra le masse sono talmente piccole che tecnicamente la cosa è molto difficile da realizzare.

forniamo ora alla questione se si debba aggiungere m_0c^2 all'energia cinetica e dire, d'ora in poi, che l'energia totale di un oggetto è mc^2 . Tanto per cominciare, se all'interno di M riuscissimo ancora a *vedere* i singoli componenti con massa a riposo m_0 , potremmo dire che la massa M dell'oggetto composto è la somma della massa meccanica a riposo delle sue parti interne, della loro energia cinetica e della loro energia potenziale. Ma abbiamo scoperto che in natura esistono vari tipi di particelle soggette a reazioni come quelle descritte sopra, nelle quali, con tutto lo studio di questo mondo, è *impossibile distinguere le parti interne*. Per esempio, quando un mesone K decade in due pioni il processo ubbidisce alla legge (4.11), ma l'idea che un K sia costituito da due particelle π è inutilizzabile perché nel decadimento possono anche formarsi tre particelle! Ecco quindi una *nuova idea*: non ci serve sapere come sono fatte le cose internamente; non possiamo distinguere, dentro una particella, quale parte dell'energia sia l'energia a riposo delle nuove entità cui darà luogo nel decadimento. Non conviene - e spesso è impossibile suddividere l'energia totale mc^2 di un oggetto in energia a riposo, energia cinetica ed energia potenziale delle sue parti interne; ci limitiamo quindi a parlare di *energia totale* della particella. Così «spostiamo l'origine» dell'energia aggiungendo a ogni cosa la costante m_0c^2 , e diciamo che l'energia totale di una particella è la sua massa in moto - o quando l'oggetto è fermo, la sua massa a riposo - moltiplicata per c^2 .

Troviamo infine che tra la velocità v , la quantità di moto P e l'energia totale E c'è una relazione abbastanza semplice. Il fatto che la massa in moto con velocità v sia la massa a riposo m_0 divisa per $\sqrt{1-v^2/c^2}$ viene usato raramente (il che può sorprendere). Risultano invece molto utili le seguenti relazioni, che è facile dimostrare:

$$E^2 - P^2c^2 = m_0^2c^4 \quad (4.13)$$

e

$$Pc = Ev/c. \quad (4.14)$$

5 LO SPAZIO-TEMPO

La geometria dello spazio-tempo

La teoria della relatività ci mostra che le relazioni tra le posizioni e tempi, misurati in sistemi di coordinate diversi, non sono quelle che ci aspetteremmo in base alle nostre idee intuitive. È molto importante capire bene le correlazioni fra spazio e tempo implicate dalla trasformazione di Lorentz, e in questo capitolo tratteremo l'argomento più a fondo.

Le equazioni della trasformazione di Lorentz, che collegano le posizioni e i tempi (x, y, z, t) misurati da un osservatore «fermo» e le corrispondenti coordinate (x', y', z', t') misurate dentro una nave spaziale «in moto» con velocità u , sono

$$\begin{aligned}x' &= \frac{x - ut}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \\y' &= y \\z' &= z \\t' &= \frac{t - ux/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}\end{aligned}\tag{5.1}$$

Confrontiamo queste equazioni con le (1.5), che mettono anch'esse in relazione le misure effettuate in due sistemi, in questo caso *ruotati* l'uno rispetto all'altro:

$$\begin{aligned}x' &= x \cos \theta + y \sin \theta \\y' &= y \cos \theta - x \sin \theta \\z' &= z.\end{aligned}\tag{5.2}$$

In questo caso, Joe e Moe prendono le loro misure usando, rispettivamente, assi x e x' formanti un angolo θ . In ogni modo osserviamo che le quantità accentate sono «mescolanze» di quelle non accentate: la nuova x' è una combinazione di x e y , e così pure la nuova y' . Torna utile un'analogia: quando guardiamo un oggetto c'è una cosa molto ovvia che possiamo chiamare «larghezza apparente», e ce n'è

un'altra che possiamo chiamare «profondità». Ma larghezza e profondità non sono proprietà *fondamentali* dell'oggetto, perché se ci spostiamo di lato e lo osserviamo sotto un altro angolo avremo una profondità e una larghezza diverse. Possiamo trovare formule per calcolare, in base all'angolo, le nuove dimensioni dalle vecchie, e queste formule sono le equazioni (5.2). Potremmo dire che una certa profondità è in realtà un «misto» di profondità e larghezza. Se non ci potessimo mai muovere e vedessimo un dato oggetto sempre dalla stessa posizione, l'intera questione non avrebbe alcuna importanza: vedremmo sempre la «vera» larghezza e la «vera» profondità, ed esse sembrerebbero avere qualità molto diverse, perché una si presenta come un angolo sotteso al nostro campo visivo, mentre la seconda implica una messa a fuoco dell'occhio o addirittura l'intuizione; ci apparirebbero cose del tutto eterogenee, e non verrebbero mai mischiate. È perché possiamo spostarci che ci rendiamo conto del fatto che, in qualche modo, profondità e larghezza non sono che aspetti della stessa cosa. *Non potremmo considerare allo stesso modo le trasformazioni di Lorentz?* Abbiamo anche qui una mescolanza - in questo caso di posizioni e di tempi.

Una differenza tra una misura di spazio e una misura di tempo produce una nuova misura di spazio. In altre parole, nelle misure di spazio effettuate da una persona è presente, dal punto di vista di un'altra persona, anche una piccola quantità di tempo. La nostra analogia ci permette di tirar fuori questo concetto: la «realtà» dell'oggetto che stiamo osservando va in qualche modo al di là (per dirla in modo grossolano e intuitivo) della sua «larghezza» e «profondità», perché *queste ultime* dipendono da come vediamo l'oggetto stesso; quando ci spostiamo in una nuova posizione, il nostro cervello le ricalcola immediatamente. Quando invece ci muoviamo ad alta velocità, il nostro cervello non ricalcola immediatamente le coordinate spaziali e il tempo, perché non abbiamo esperienza effettiva di moto a velocità prossime a quella della luce, per renderci conto del fatto che anche il tempo e lo spazio sono della stessa natura. È come se fossimo bloccati per sempre in una posizione che ci permette di scorgere solo la larghezza di qualcosa, non essendo in grado di muovere apprezzabilmente la testa né da una parte né dall'altra. Se ne fossimo capaci - ora ci è chiaro - vedremmo una parte del tempo dell'altra persona; vedremmo, per così dire, un pochino «dietro l'angolo». Tenteremo perciò di pensare gli oggetti in un nuovo tipo di uni-

verso, in cui spazio e tempo si mescolano - nello stesso senso in cui gli oggetti dello spazio ordinario sono reali e possono essere visti da varie angolazioni. Supporremo che ogni oggetto che abbia un'estensione spaziale e duri un certo tempo occupi una sorta di «bolla» in un nuovo universo, e di osservare tale «bolla» da punti di vista diversi quando ci muoviamo a velocità diverse. Questo nuovo mondo, questa entità geometrica in cui una «bolla» esiste in quanto occupa una posizione e dura una certa quantità di tempo, si chiama *spazio-tempo*. Un punto (x, y, z, t) dello spazio-tempo è detto *evento*. Immaginiamo per esempio di riportare i valori di x su un asse orizzontale, quelli di y e z in altre due direzioni, entrambe «perpendicolari» tra loro e «perpendicolari» al foglio (!), e il tempo sull'asse verticale: come apparirebbe una particella in movimento in un diagramma di questo tipo?

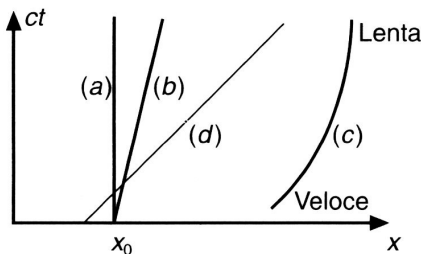


Fig. 21 - Traiettorie di particelle nello spazio-tempo: (a) particella in quiete in $x = x_0$; (b) particella che parte da $x = x_0$ e si muove a velocità costante; (c) particella che parte a grande velocità e successivamente rallenta.

Se la particella è ferma in un punto di coordinata x , col passare del tempo avrà sempre quella x : la sua «traiettoria», quindi, è una retta parallela all'asse t (fig. 21a); se invece si sposta all'esterno, la x aumenta (fig. 21b). Così, ad esempio, una particella che inizialmente si muove con certa velocità e poi rallenta progressivamente dovrebbe avere, più o meno, un moto come quello della figura 21c. In altre parole, una particella stabile - che non si disintegra - è rappresentata da una linea nello spazio-tempo. Il decadimento sarebbe indicato da una biforcazione, perché in quel punto si originerebbero due cose diverse. E la luce? Viaggia alla velocità c , che possiamo rappresentare per mezzo di una retta con una certa inclinazione fissa (fig. 21 d). Stando a questa nuova idea, se a una particella succede una determinata cosa - se ad esempio, in un certo punto dello spazio-tempo, la

particella a un tratto decade in due nuove particelle che prendono nuove traiettorie - e se questo interessante fenomeno accade per una certa x e una certa t , ci aspettiamo che basti prendere un'altra coppia di assi e ruotarla - ammesso che la cosa abbia senso - per avere la nuova x e la nuova t nel nostro nuovo sistema di riferimento, come nella figura 22a.

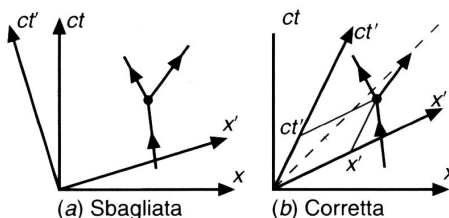


Fig. 22 - Due rappresentazioni del decadimento di una particella.

E invece no, il ragionamento è sbagliato, perché dal punto di vista matematico la trasformazione (5.1) non è *esattamente* uguale alle (5.2). Si noti ad esempio che nella prima equazione c'è una differenza di segno; inoltre, una è scritta in termini di $\sin \theta$ e $\cos \theta$, mentre l'altra è un'espressione algebrica. (Naturalmente, non è impossibile scrivere grandezze algebriche mediante seni e coseni, ma non in questo caso). Ciò non toglie che le due espressioni siano *molto* simili. Più avanti vedremo che lo spazio-tempo non può essere considerato come un'ordinaria geometria per via di quella differenza di segno. Bisogna infatti - ma non insisteremo su questo punto - che l'osservatore in moto prenda un sistema di assi che abbiano la stessa inclinazione rispetto al raggio luminoso, usando per le sue coordinate x' e t' una particolare proiezione parallela agli assi, come illustrato nella figura 22b. Ma non ci occuperemo della geometria, perché non è di grande aiuto; è più facile lavorare con le equazioni.

Intervalli spaziotemporal

Anche se la geometria dello spazio-tempo non è euclidea nel senso ordinario del termine, esiste comunque una geometria molto simile a quella euclidea, sia pure con certe peculiarità. Se questa idea è cor-

retta, dovrebbero esservi funzioni delle coordinate e del tempo indipendenti dal sistema di riferimento. Supponiamo per esempio di prendere due punti, uno per semplicità nell'origine degli assi, e l'altro in una posizione qualsiasi; e di eseguire una rotazione ordinaria: il sistema ruotato ha la stessa origine e la distanza tra i due punti è la stessa. Questa proprietà non dipende da come viene effettuata la misura. Nello spazio euclideo il quadrato della distanza è $x^2 + y^2 + z^2$. E nello spazio-tempo? È facile vedere che anche in questo caso c'è qualcosa che non cambia, ed è la combinazione $c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2$:

$$c^2t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2. \quad (5.3)$$

Anche questa quantità dev'essere pertanto, in un certo senso, qualcosa di reale; essa è detta *intervallo* tra i due eventi - uno dei quali è in questo caso l'origine. (A rigore è il quadrato dell'intervallo, così come $x^2 + y^2 + z^2$ è il quadrato della distanza nello spazio euclideo). Le diamo un nome diverso perché ci troviamo in una geometria diversa, ma l'unica cosa interessante è che certi termini sono (ambiati di segno e vi compare una c . Proviamo a eliminare la c ; è assurdo tenerla, se vogliamo un bello spazio con le x e y intercambiabili. Uno dei modi in cui una persona inesperta potrebbe fare confusione sarebbe, per esempio, quello di misurare le larghezze in base all'angolo sotteso dall'occhio e le profondità in un altro modo, per esempio in base allo sforzo necessario all'occhio per l'accomodamento. Sarebbe come misurare le profondità in piedi e le larghezze in metri; a quel punto anche le equazioni indispensabili per una trasformazione come la (5.2) diventerebbero un caos spaventoso e non riusciremmo più a vedere chiarezza e semplicità nelle cose per una banalissima ragione tecnica: la stessa cosa viene misurata usando due unità diverse. Ora, nelle relazioni (5.1) e (5.3) la natura ci dice che tempo e spazio si equivalgono; il tempo diventa spazio; *dovremmo misurarli con le stesse unità*. Che distanza è «un secondo»? Dalla (5.3) si calcola facilmente: è 3×10^8 metri, *la distanza percorsa dalla luce in un secondo*. In altre parole, se misurassimo tanto le distanze quanto i tempi con la stessa unità, i secondi, la nostra distanza unitaria sarebbe di 3×10^8 metri e le equazioni sarebbero più semplici. Ma potremmo uniformare le nostre unità anche misurando il tempo in metri: quant'è un metro di tempo? È il tempo che impiega la luce a percorrere un metro, cioè $1/3 \times 10^{-8}$ secondi, ovvero 3,3 miliardesimi

di secondo. Noi vorremmo, in altre parole, esprimere tutte le nostre equazioni usando un sistema di unità di misura in cui $c = 1$; ed è ovvio che se usiamo una stessa unità di misura per tempo e spazio come abbiamo appena proposto, le equazioni saranno molto semplificate e diventeranno

$$\begin{aligned}x' &= \frac{x - ut}{\sqrt{1 - u^2}} \\y' &= y \\z' &= z \\t' &= \frac{t - ux}{\sqrt{1 - u^2}}\end{aligned}\tag{5.4}$$

$$t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = t^2 - x^2 - y^2 - z^2\tag{5.5}$$

Se abbiamo il dubbio, o magari il timore, che una volta messo su questo sistema con $c=1$ non riusciremo più a ripristinarle - ebbene, è vero il contrario. È molto più comodo ricordarsele senza tutte quelle c , che sono anche facili da reinserire, badando alle dimensioni. In $\sqrt{1 - u^2}$, per esempio, sappiamo di non poter sottrarre il quadrato di una velocità - che ha le sue dimensioni - dal numero puro 1, e di dover dividere u^2 per c^2 così da renderlo adimensionale: è così che funziona.

La differenza tra spazio-tempo e spazio ordinario, come la natura di un intervallo in rapporto a una distanza, è molto interessante. Stando alla formula (5.5), se consideriamo un punto che in un certo sistema di coordinate ha tempo zero, e soltanto componenti spaziali, allora il quadrato di questo intervallo sarebbe negativo e l'intervallo stesso, come radice quadrata di un numero negativo, sarebbe immaginario. Per la teoria gli intervalli possono essere reali o immaginari; e a differenza di una distanza, che ha sempre quadrato positivo, l'intervallo può avere un quadrato positivo o negativo. Quando l'intervallo è immaginario, diciamo che tra i due eventi c'è un intervallo *di tipo spaziale* (anziché immaginario), in quanto è più simile allo spazio che al tempo. Se invece, in un dato sistema di coordinate, due oggetti sono nello stesso luogo e differiscono solo per il tempo, le distanze sono zero, il quadrato dell'intervallo è positivo e diciamo che l'intervallo stesso è *di tipo temporale*. Perciò nel nostro diagramma

dello spazio-tempo avremmo una rappresentazione di questo tipo: vi sarebbero due linee a 45° (in realtà, in quattro dimensioni saranno «coni», i cosiddetti coni luce), e tutti i loro punti saranno separati dall'origine da un intervallo nullo. Se da un punto esce luce, quella luce sarà sempre separata da quel punto da un intervallo nullo, come mostra l'equazione (5.5). In tal modo si dimostra, per inciso, che se la luce viaggia a velocità c in un certo sistema, viaggia con quella velocità anche in un altro: infatti, se l'intervallo è lo stesso, cioè nullo, in entrambi i sistemi, dire che la velocità di propagazione della luce è la stessa equivale a dire che l'intervallo è nullo.

Passato, presente e futuro

La regione spaziotemporale che circonda un dato punto dello spazio-tempo può essere divisa in tre regioni, come mostra la figura 23: in una abbiamo intervalli di tipo spaziale, e nelle altre due intervalli di tipo temporale.

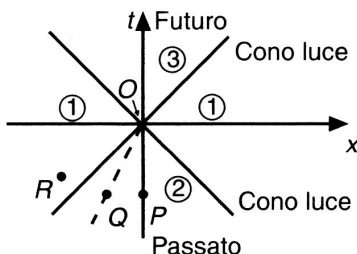


Fig. 23 - La regione dello spazio-tempo intorno a un punto posto nell'origine.

Queste tre sottoregioni hanno con il punto una relazione fisica molto interessante: un oggetto fisico, o un segnale, può raggiungere l'evento O da un punto della regione 2 muovendosi con velocità minore di quella della luce. Pertanto gli eventi in questa regione possono interessare il punto O , possono esercitare su di esso un'influenza dal passato. In effetti un oggetto che si trovi in P , sull'asse t negativo, è precisamente nel «passato» rispetto a O ; ha le stesse coordinate spaziali, ma in un istante precedente. Quanto è accaduto lì allora in-

teressa *O* adesso. (Purtroppo è così che va la vita). In *Q* c'è un altro oggetto che può raggiungere *O* *muovendosi* a velocità minore di *c*; e quindi se questo oggetto fosse su una nave spaziale in movimento, sarebbe anch'esso il passato del punto avente quelle coordinate spaziali. In altre parole, in un sistema di coordinate diverso, l'asse temporale potrebbe passare sia per *O* che per *Q*. Perciò i punti della regione 2 appartengono tutti al «passato» di *O*; tutto ciò che accade nella regione 2 *può* influire su *O*, tanto che essa viene talvolta chiamata «passato influente» giacché è il luogo di tutti gli eventi che possono in qualche modo avere effetto sul punto *O*.

La regione 3 è invece quella sulla quale possiamo agire *da O*, quella in cui possiamo «colpire» un bersaglio sparando «pallottole» più lente della luce; è il mondo il cui futuro può essere influenzato da noi, e che possiamo quindi chiamare «futuro influenzabile». Ora, la cosa interessante a proposito della regione 1, il resto dello spaziotempo, è che noi non possiamo influenzarla *da O*, né essa può influenzarci ora *in O*, perché niente può andare più veloce della luce. Naturalmente quello che accade in *R* *potrà* avere effetto su di noi *in seguito*; ad esempio, se il Sole esplode «proprio ora» passeranno otto minuti prima che lo sappiamo, e prima di allora la cosa non può avere alcun effetto su di noi.

Ma che significa «proprio ora»? È una cosa misteriosa, indefinibile, sulla quale non abbiamo influenza, ma che potrà influire su di noi in futuro - o che avremmo potuto influenzare se avessimo fatto determinate cose in un passato abbastanza lontano. Quando guardiamo Alpha Centauri la vediamo com'era quattro anni fa: potremmo chiederci come sia «ora», dove «ora» significa in questo stesso istante nel nostro particolare sistema di coordinate. Di Alpha Centauri vediamo solo la luce che ci arriva dal nostro passalo, risalente a quattro anni fa, ma non sappiamo che cosa stia facendo «ora» e ci vorranno quattro anni prima che quello che fa «ora» abbia un effetto su di noi. Alpha Centauri «ora» è un'idea, un concetto che esiste solo nella nostra mente, non qualcosa di reale e definibile fisicamente, perché per osservarlo dobbiamo aspettare; non possiamo neanche definirlo esattamente «ora». Inoltre, il nostro «ora» dipende dal sistema di riferimento. Se per esempio Alpha Centauri fosse in movimento, un osservatore laggiù non sarebbe d'accordo con noi, perché i suoi assi sarebbero disposti secondo certi angoli, e il suo «ora» sarebbe un tempo *diverso*. Abbiamo già discusso il fatto che la simul-

taneità non è unica.

Vi sono indovini e persone che dicono di poter vedere nel futuro, e vi sono storie bellissime a proposito del tale che scopre, improvvisamente, di essere a conoscenza del futuro «influenzabile» - un futuro su cui possiamo influire. Ne nascono paradossi a non finire, perché sapendo cosa sta per accadere, possiamo evitarlo facendo la cosa giusta al momento giusto. In realtà non esistono indovini che possano dirci neppure il presente! Nessuno è in grado di dirci che cosa sta accadendo in questo preciso momento a una ragionevole distanza, perché è una cosa inosservabile. Potremmo chiederci se nascerebbero dei paradossi se d'un tratto diventasse possibile conoscere cose situate negli intervalli di tipo spaziale della regione 1. Lascio a voi la risposta.

Ancora sui quadrivettori

Torniamo ora all'analogia fra la trasformazione di Lorentz e le rotazioni degli assi spaziali. Abbiamo visto che è utile mettere insieme grandezze che hanno le stesse proprietà di trasformazione delle coordinate, per formare i cosiddetti *vettori*, cioè segmenti orientati. Nel caso delle rotazioni ordinarie, vi sono molte quantità che si trasformano allo stesso modo di x , y , z per effetto della rotazione. La velocità, per esempio, ha tre componenti, le componenti x , y , e z , ma se vengono viste in un diverso sistema di coordinate, nessuna resta la stessa e tutte prendono nuovi valori. In un modo o nell'altro, però, la velocità «intrinseca» è più reale di tutte le singole componenti, e noi la rappresentiamo con un segmento orientato.

Chiediamoci dunque: è vero o non è vero che vi sono grandezze che si trasformano - o che sono correlate, in un sistema in movimento e in un sistema immobile - come le x , y , z e t ? Dalla nostra esperienza con i vettori, sappiamo che tre di queste - ad esempio x , y e z - sarebbero le componenti di un normale vettore nello spazio, mentre la quarta grandezza si comporterebbe, rispetto alle rotazioni nello spazio, come un normale scalare, perché non varia fin quando non passiamo a sistemi di riferimento in moto. Ma è possibile associare a quei «vettori in tre dimensioni» che già conosciamo un quarto og-

getto (che potremmo chiamare «componente temporale») cosicché tutti e quattro insieme «ruotino» allo stesso modo della posizione e del tempo nello spazio-tempo? Ora mostreremo che esiste almeno un oggetto di questo tipo (per la verità ve ne sono parecchi): *le tre componenti della quantità di moto, e l'energia come componente temporale, si trasformano tutte insieme*, e formano quello che viene chiamato un «quadrivettore». Nella dimostrazione, per non dover scrivere delle c dappertutto, utilizzeremo lo stesso accorgimento che abbiamo già visto nell'equazione (5.4) per le unità di energia, massa e quantità di moto. Ad esempio, l'energia e la massa differiscono solo per un fattore c^2 , ma se c è uno possiamo dire che l'energia è la massa e scrivere semplicemente $E = m$. Naturalmente, se vi saranno difficoltà, nell'equazione finale (ma non in quelle intermedie) rimetteremo a posto tutte le c per far quadrare i conti dal punto di vista dimensionale.

Le equazioni dell'energia e della quantità di moto saranno dunque

$$\begin{aligned} E &= m = m_0 / \sqrt{1 - v^2} \\ \mathbf{p} &= m \mathbf{v} = m_0 \mathbf{v} / \sqrt{1 - v^2} \end{aligned} \quad (5.6)$$

In queste unità, abbiamo inoltre

$$E^2 - p^2 = m_0^2. \quad (5.7)$$

Se misuriamo, per esempio, l'energia in elettronvolt, che significa una massa di 1 elettronvolt? Significa quella massa la cui energia a riposo è 1 elettronvolt; in altri termini, $m_0 c^2$ è uguale a un elettronvolt. La massa a riposo di un elettrone, ad esempio, è $0,511 \times 10^6$ eV. Ma come sarebbero l'energia e la quantità in un nuovo sistema di coordinate? Per scoprirlo dobbiamo trasformare le equazioni (5.6), e possiamo farlo perché sappiamo come si trasforma la velocità. Supponiamo che un oggetto abbia, nel nostro sistema di riferimento, una velocità v . Ma immaginiamo ora che questo stesso oggetto venga visto da una navicella spaziale, che si muove a sua volta con velocità u . Per semplicità, facciamo l'ipotesi che u abbia la stessa direzione di v (potremo sempre generalizzare, a suo tempo). Qual è la velocità v' osservata dalla navicella? È la «differenza» fra v e u , una combinazione tra le due data, per la legge ricavata in precedenza, da

$$v' = \frac{v-u}{1-uv} . \quad (5.8)$$

Calcoliamo ora l'energia E' che verrebbe misurata dall'astronauta. Ovviamente, userà la stessa massa a riposo, ma terrà conto della velocità v' . Si tratta allora di elevare v' al quadrato, sottrarlo da 1, prendere la radice quadrata, e fare l'inverso della radice:

$$\begin{aligned} v'^2 &= \frac{v^2 - 2uv + u^2}{1 - 2uv + u^2v^2}, \\ 1 - v'^2 &= \frac{1 - 2uv + u^2v^2 - v^2 + 2uv - u^2}{1 - 2uv + u^2v^2} \\ &= \frac{1 - v^2 - u^2 + u^2v^2}{1 - 2uv + u^2v^2} \\ &= \frac{(1-v^2)(1-u^2)}{(1-uv)^2}. \end{aligned}$$

Perciò

$$\frac{1}{\sqrt{(1-v'^2)}} = \frac{1-uv}{\sqrt{1-v^2}\sqrt{1-u^2}} . \quad (5.9)$$

Dunque l'energia E' è semplicemente questa espressione moltiplicata per m_0 ; ma noi vogliamo esprimerla in funzione dell'energia e della quantità di moto non accentate, e osserviamo che

$$\begin{aligned} E' &= \frac{m_0 - m_0 uv}{\sqrt{1-v^2}\sqrt{1-u^2}} \\ &= \frac{(m_0/\sqrt{1-v^2}) - (m_0 v/\sqrt{1-v^2})u}{\sqrt{1-u^2}} , \end{aligned}$$

ovvero

$$E' = \frac{E - u p_x}{\sqrt{1 - u^2}} , \quad (5.10)$$

che, come si vede, ha esattamente la forma di

$$t' = \frac{t - u x}{\sqrt{1 - u^2}} .$$

Ora dobbiamo trovare la nuova quantità di moto p'_x ; essa non è che l'energia E per v' , e può essere espressa semplicemente a partire da E e p :

$$\begin{aligned} p'_x &= E' v' = \frac{m_0(1 - uv)}{\sqrt{1 - v^2} \sqrt{1 - u^2}} \cdot \frac{v - u}{(1 - uv)} = \\ &= \frac{m_0 v - m_0 u}{\sqrt{1 - v^2} \sqrt{1 - u^2}} . \end{aligned}$$

Quindi

$$p'_x = \frac{p_x - u E}{\sqrt{1 - u^2}} , \quad (5.11)$$

che ha la stessa forma di

$$x' = \frac{x - u t}{\sqrt{1 - u^2}} .$$

Dunque le equazioni di trasformazione dell'energia e della quantità di moto sono le stesse che danno x' e t' in funzione di x e di t : basta sostituire ovunque nelle (5.4) t con E e x con p_x per ottenere, rispettivamente, la (5.10) e la (5.11). Ciò implicherebbe, se le nostre ipotesi sono corrette, le due regole aggiuntive $p'_y = p_y$ e $p'_z = p_z$; ma per dimostrarlo dovremmo tornare a esaminare il moto in direzione verticale. Nel capitolo 4 abbiamo studiato per l'appunto un moto di questo tipo nel caso di un urto piuttosto complicato, osservando che la componente trasversale della quantità di moto non cambia quando è

vista da un sistema in movimento; dunque abbiamo *già* verificato che $p'_y = p_y$ e $p'_z = p_z$. La trasformazione completa sarà

$$\begin{aligned} p'_x &= \frac{p_x - uE}{\sqrt{1-u^2}} \\ p'_y &= p_y \\ p'_z &= p_z \\ E' &= \frac{E - up_x}{\sqrt{1-u^2}}. \end{aligned} \quad (5.12)$$

I queste equazioni abbiamo scoperto quattro grandezze che si trasformano come x , y , z e t : esse costituiscono il *quadrivettore quantità di moto* (o quadrimpulso). Essendo un quadrivettore, questa grandezza può essere rappresentata, nel diagramma spaziotemporale di una particella in moto, con una «freccia» tangente alla traiettoria, come nella figura 24.

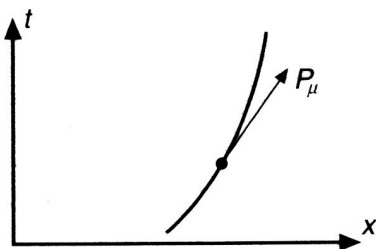


Fig. 24 - Il quadrivettore quantità di moto di una particella.

La freccia ha una componente temporale pari all'energia della particella, mentre le componenti spaziali rappresentano la quantità di moto tridimensionale. Per certi versi la freccia è più «reale» sia dell'energia sia della quantità di moto, poiché queste, separatamente, dipendono dal modo in cui guardiamo il diagramma.

L'algebra dei quadrivettori

La notazione quadrivettoriale è diversa da quella dei vettori in tre

dimensioni. Nel secondo caso, per indicare l'ordinaria quantità di moto scriviamo il simbolo $\mathbf{p}$. Volendo essere più specifici diciamo che la quantità di moto ha tre componenti, che sono, per gli assi in questione, p_x , p_y e p_z ; oppure, semplicemente, ci riferiamo alla generica componente p_i , precisando che l'indice i può essere x , y o z e che le tre componenti sono esattamente quelle citate. La notazione che usiamo per i quadrivettori è analoga: indichiamo il quadrivettore quantità di moto con p_μ , dove μ sta per le *quattro* direzioni possibili x , y , z e t .

Naturalmente possiamo usare la notazione che più ci garba; non ridete delle notazioni, inventatene, esse sono potenti. Gran parte della matematica, a ben vedere, è invenzione di buone notazioni. L'intero concetto di quadrivettore è un progresso della notazione, che permette di ricordare più facilmente certe trasformazioni. A_μ è così un generico quadrivettore, ma nel caso particolare della quantità di moto, p_t si identifica con l'energia, p_x è la quantità di moto nella direzione x , p_y quella nella direzione y e p_z quella nella direzione z . I quadrivettori si sommano addizionando le componenti corrispondenti.

Se vi è un'equazione quadrivettoriale, essa varrà *per ogni componente*. Ad esempio, se nell'urto fra particelle deve valere il principio di conservazione del vettore quantità di moto in tre dimensioni - se cioè la somma dei vettori quantità di moto di un grande numero di particelle che interagiscono o collidono dev'essere costante -, questo implica che le somme di tutte le quantità di moto in direzione x , in direzione y e in direzione z , per tutte le particelle, saranno altrettante costanti. Nella relatività non possiamo prendere questa legge da sola perché essa è *incompleta*. Sarebbe come parlare di due sole componenti di un vettore nello spazio a tre dimensioni: in una rotazione di assi tutte le componenti si mischiano, per cui vanno incluse tutte e tre nella legge. In relatività dobbiamo quindi estendere il principio di conservazione della quantità di moto così da comprendere la componente *temporale*, che è *assolutamente necessario* associare alle altre, se vogliamo che vi sia invarianza relativistica. La *conservazione dell'energia* è data dalla quarta equazione, che va aggiunta alla conservazione del momento per formare una relazione quadrivettoriale valida nella geometria dello spazio e del tempo. Il principio di conservazione della quantità di moto e dell'energia, scritto nella notazione quadridimensionale, è quindi

$$\sum_{\substack{\text{particelle} \\ \text{entranti}}} p_{\mu} = \sum_{\substack{\text{particelle} \\ \text{uscenti}}} p_{\mu} \quad , \quad (5.13)$$

o, con una notazione leggermente diversa,

$$\sum_i p_{i\mu} = \sum_j p_{j\mu} \quad . \quad (5.14)$$

dove $i = 1, 2, \dots$ si riferisce alle particelle che entrano nell'urto, $j = 1, 2, \dots$ a quelle che ne escono e $\mu = x, y, z$ o t . Lungo quali assi? Non fa differenza. La legge vale per ogni singola componente e per *qualsiasi* sistema di assi.

Trattando dell'analisi vettoriale, abbiamo parlato fra l'altro del prodotto interno o scalare di due vettori, indicato con un puntino; consideriamo ora il corrispettivo nello spazio-tempo. Abbiamo visto che nelle rotazioni ordinarie c'è una grandezza invariante, $x^2 + y^2 + z^2$; sappiamo che in quattro dimensioni le corrisponde $t^2 - x^2 - y^2 - z^2$ (eq. 5.3). Come indicare questa cosa? Si potrebbe, ad esempio, scrivere qualcosa come $A_{\mu} \diamond B_{\mu}$, mettendo un puntino dentro un quadrato; ma in pratica si utilizza la seguente notazione

$$\sum_{\mu} ' A_{\mu} B_{\mu} = A_t B_t - A_x B_x - A_y B_y - A_z B_z \quad . \quad (5.15)$$

L'apice su Σ indica che il primo termine, quello «temporale», è positivo mentre gli altri tre hanno segno negativo. Questa grandezza sarà la stessa in tutti i sistemi di riferimento; possiamo chiamarla quadrato della «lunghezza» del quadrivettore. Qual è per esempio il quadrato della lunghezza della quantità di moto quadrivettoriale di una singola particella? Sarà usuale a $p_t^2 - p_x^2 - p_y^2 - p_z^2$, ovvero a $E^2 - p^2$, dato che p_t , come sappiamo, è uguale a E . Ma che cos'è $E^2 - p^2$? Dovrà essere qualcosa di uguale in tutti i sistemi di riferimento, compresi, in particolare, quelli che si spostano insieme alla particella e nei quali dunque questa risulta immobile. Ma se una particella è immobile, non ha quantità di moto. In un tale riferimento, quella espressione è solo la sua energia, che è identica alla massa a riposo. Pertanto $E^2 - p^2 = m_0^2$. Vediamo così che il quadrato della lunghezza di questo vettore (il quadrimpulso) è uguale a m_0^2 .

A partire dal quadrato di un vettore possiamo andare avanti e definire il prodotto «interno», o prodotto «scalare», il cui risultato è uno scalare: se a_μ e b_μ sono due quadrivettori, il loro prodotto scalare è

$$\sum' a_\mu b_\mu = a_t b_t - a_x b_x - a_y b_y - a_z b_z, \quad (5.16)$$

identico in tutti i sistemi di riferimento. Accenniamo infine ad alcuni oggetti la cui massa a riposo è nulla, per esempio i fotoni. Un fotone è simile a una particella nel senso che ha energia e quantità di moto; la sua energia è una certa costante, la cosiddetta costante di Planck, moltiplicata per la sua frequenza: $E=hf$. La quantità di moto del fotone (come, per la verità, quella di qualsiasi altra particella) è invece h divisa per la lunghezza d'onda, $p = h/\lambda$. Per un fotone c'è però una precisa correlazione tra frequenza e lunghezza d'onda, $\nu = c/\lambda$. (Il numero di lunghezze d'onda al secondo, moltiplicato per la lunghezza d'onda, dà la distanza percorsa dalla luce in un secondo, che come tutti sanno è c). Si vede subito, dunque, che l'energia di un fotone deve essere uguale alla quantità di moto per c ; ossia, se $c = 1$, *l'energia e la quantità di moto sono uguali*. Ma ciò equivale a dire che la massa a riposo è nulla. Fermiamoci su questo punto, perché è davvero curioso. Se una particella ha una massa a riposo nulla, che cosa succede quando si ferma? *Non si ferma mai!* Va sempre a velocità c . La formula canonica dell'energia è $m_0/\sqrt{1-v^2}$ ma possiamo dire che $m_0 = 0$ e $v = 1$, per cui l'energia è 0? *Non possiamo*; in realtà il fotone può possedere (e possiede) energia pur non avendo massa a riposo, ma la possiede in quanto viaggia costantemente alla velocità della luce!

Sappiamo anche che la quantità di moto di una particella è uguale alla sua energia totale per la sua velocità: se $c=1$, $p=vE$ ossia, in unità ordinarie, $p = vE/c^2$, e per una particella che si muova alla velocità della luce $p=E$ se $c=1$. Naturalmente, le formule dell'energia di un fotone visto da un sistema in movimento sono date dalle equazioni (5.12), ma dobbiamo sostituire alla quantità di moto l'energia moltiplicata per c (o, in questo caso, per 1). La differenza tra le energie nei due sistemi significa che sono diverse le frequenze; è il cosiddetto effetto Doppler, facilmente calcolabile a partire dalle (5.12) usando anche $E=p$ e $E=hf$.

Come disse Minkowski, «D'ora in poi il solo spazio e il solo tempo

sono destinati a dissolversi, diventando semplici ombre, e solo una forma di unità tra l'uno e l'altro conserverà una realtà indipendente». ¹¹

¹¹ Hermann Minkowski, *Raum und Zeit*, in «Physikalische Zeitschrift», III (1908), p. 104 [N.d.T.].

Spazi curvi in due dimensioni

Secondo Newton, ogni cosa attrae ogni altra con forza inversamente proporzionale al quadrato della distanza, e un oggetto risponde a una forza con un'accelerazione a essa proporzionale. Le leggi di Newton della gravitazione universale e della dinamica sono queste, e spiegano, come ben sapete, i movimenti di palle, pianeti, satelliti, galassie, e via dicendo.

Einstein interpretava la legge di gravitazione in un altro modo: secondo lui, vicino a una massa molto grande lo spazio e il tempo, che vanno fusi nello spazio-tempo, si incurvano, e le cose si muovono come si muovono perché tendono ad andare lungo «linee rette» in questo spazio-tempo curvo. È un'idea molto complessa, ed è quella che vogliamo spiegare in questo capitolo. Il nostro argomento è diviso in tre parti: la prima riguarda gli effetti della gravità, la seconda riprende i concetti di spazio-tempo che abbiamo già studiato e la terza ha a che fare con la nozione di spazio-tempo curvo. All'inizio per semplificare le cose non ci occuperemo né della gravità né del tempo: parleremo, dunque, solo di spazio curvo. Le altre questioni le affronteremo più avanti, ma per adesso ci concentreremo soltanto su questa idea di spazio curvo - che cosa s'intende per spazio curvo, e più specificamente che cosa significa in questa applicazione della teoria di Einstein. Anche così, in tre dimensioni l'argomento resterebbe alquanto difficile; semplificheremo quindi ulteriormente il problema e parleremo del significato dello «spazio curvo» in due dimensioni.

Per capire il concetto di spazio curvo in due dimensioni dobbiamo realmente adottare la visuale (molto limitata) di qualcuno che abiti un simile spazio.

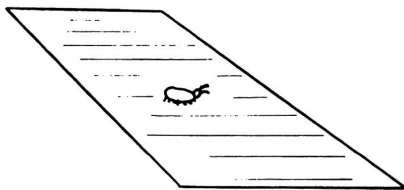


Fig. 25 - Insetto su una superficie piana.

Proviamo a immaginare un insetto privo di occhi che viva su un piano (fig. 25); egli può spostarsi solo su questo piano e non saprà mai se via sia qualsiasi possibilità di scoprire un «mondo esterno» (non ha la vostra immaginazione). Naturalmente ragioniamo per analogia; *noi* viviamo in un mondo tridimensionale, non riusciamo assolutamente a immaginare come potremmo uscirne lungo una qualche nuova direzione: dobbiamo affrontare la questione ragionando, appunto, per analogia, come se fossimo insetti che vivono su un piano e vi fosse uno spazio in un'altra direzione. Ecco perché da principio ragioniamo sull'insetto, ricordando che deve vivere sulla sua superficie e non può uscirne.

Consideriamo un altro esempio di insetto bidimensionale che vive su una sfera. Supporremo che possa camminare liberamente sulla superficie sferica, come nella figura 26, ma non guardare «in su» o «in giù», o «fuori».

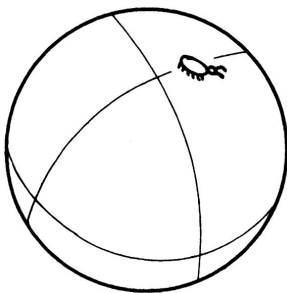


Fig. 26 - Insetto su una sfera.

E adesso consideriamo un *terzo* tipo di creatura: è anche lui un insetto come gli altri due, e anche lui, come il primo, vive su un piano, ma questa volta il piano ha una particolarità - la sua temperatura varia da punto a punto. Inoltre l'insetto e tutti i regoli graduati di cui dispone sono fatti di un materiale che quando è riscaldato si dilata: ogni volta che lui posa un regolo da qualche parte per misurare qual-

cosa, immediatamente il righello si dilata fino alla lunghezza che corrisponde alla temperatura in quel punto. Ovunque metta un oggetto - se stesso, un righello, un triangolo, qualunque cosa -, subito quello si allunga o accorcia per via della dilatazione termica. Tutto è più lungo nei posti caldi, più corto nei posti freddi, e tutto ha lo stesso coefficiente di dilatazione. Diremo che la patria del nostro terzo insetto è una «piastra calda», anche se dovremo immaginare una piastra calda di tipo particolare, più tiepida al centro e che si arroventa man mano che ci avviciniamo all'orlo (fig. 27).

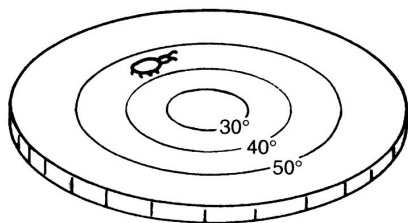


Fig. 27 - Insetto su una piastra calda.

Adesso supponiamo che i nostri insetti comincino a studiare geometria. Per ipotesi sono ciechi, per cui non potranno vedere niente di «esterno», ma con le zampe e le antenne possono fare un mucchio di cose: tracciare linee, costruire righelli, misurare lunghezze. Supponiamo dunque che partano dall'idea geometrica più semplice e imparino a tracciare una retta, intesa come la linea più corta tra due punti. Il primo insetto, quello della figura 28, impara a fare bellissime rette; ma quello sulla sfera che combinerà?

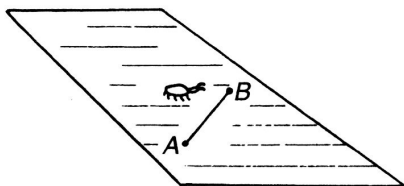


Fig. 28 - Costruzione di una «linea retta» su un piano.

Tirerà, come vediamo nella figura 29, una linea che *per lui* è la più piccola distanza fra due punti; a noi può anche sembrare una curva, ma lui non ha modo di abbandonare la sfera e scoprire che «in realtà» ci sarebbe una linea ancora più corta. Sa solo che se *nel suo mondo* tenta un qualsiasi altro percorso, questo sarà sempre più

lungo della *sua* retta. Per l'insetto è «retta» l'arco più breve fra due punti (che naturalmente è un arco di cerchio massimo).

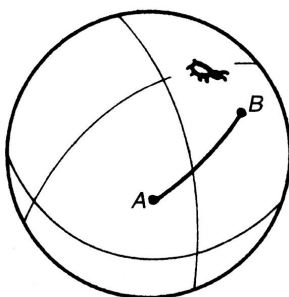


Fig. 29 - Costruzione di una «linea retta» su una sfera.

Infine, anche il terzo insetto, quello della figura 27, tratterà delle «rette» che a noi sembrano curve; nella figura 30, per esempio, la distanza più corta tra *A* e *B* sarebbe una curva come quella che vediamo - ma perché?

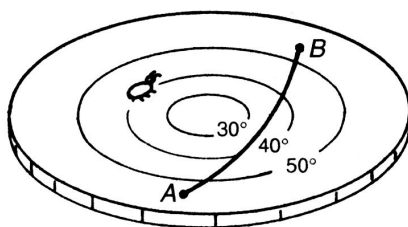


Fig. 30 - Costruzione una «linea retta» sulla piastra calda.

Perché quando la linea del terzo insetto passa dalla parte più calda della piastra, i righelli (dal nostro punto di vista onnisciente) si allungano e bastano meno «metri» posti in fila per coprire la distanza da *A* a *B*. *Per lui* quella è una retta; non ha modo di sapere che «fuori», in uno strano mondo tridimensionale, forse c'è qualcuno che chiamerebbe «retta» una linea diversa.

Penso che ormai avrete capito che questa analisi verrà sempre condotta dal punto di vista delle creature che stanno su quella tal superficie, non dal *nostro*. Avendo questo in mente, vediamo un po' qualche altro aspetto delle loro geometrie. Supponiamo che gli insetti abbiano imparato a tracciare linee che si intersecano ad angolo retto (provate un po' a immaginare come potrebbero fare). Bene, a quel punto il primo, quello sul piano normale, scopre una cosa interes-

sante: se parte dal punto *A*, traccia una linea lunga 100 centimetri, poi gira ad angolo retto, tira altri 100 centimetri, gira di nuovo ad angolo retto, stacca altri 100 centimetri, e poi per la terza volta gira ad angolo retto e segna ancora 100 centimetri, ritorna giusto al punto di partenza, come mostra la figura 31a. È una proprietà del suo mondo, uno dei fatti della sua «geometria».

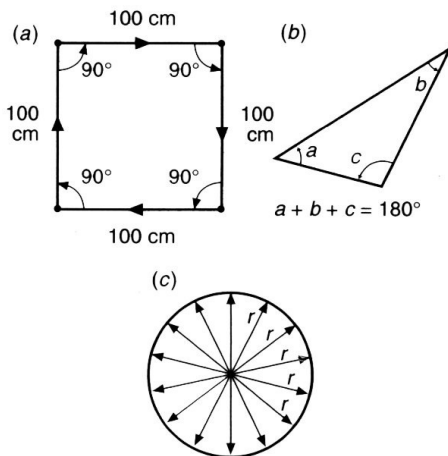


Fig. 31 - Un quadrato, un triangolo e un cerchio in uno spazio piatto.

Poi scopre un'altra cosa interessante: se disegna un triangolo - una figura chiusa da tre rette - la somma degli angoli è uguale a 180° , cioè a due angoli retti (fig. 31b).

Dopodiché inventa il cerchio. Ma che cos'è un cerchio? Si fa in questo modo: da un unico punto facciamo partire rette in tantissime direzioni e ci segniamo dei punti tutti alla stessa distanza da quello di partenza (fig. 31c). (Dobbiamo stare ben attenti a come definiamo queste cose perché gli altri insetti devono essere in grado di costruire figure analoghe). Naturalmente, tutto ciò equivale alla curva che si ottiene girando un righello intorno a un punto fisso... ma sia come sia, il nostro insetto impara a fare dei cerchi. Poi, un bel giorno, pensa di misurarne la lunghezza, e ne misura parecchi, e trova una bella relazione: questa lunghezza è sempre uguale al raggio r (ovviamente, la distanza dal centro alla curva) moltiplicato per un certo numero. Tra circonferenza e raggio c'è sempre lo stesso rapporto - approssimativamente, 6,283 - indipendentemente dalle dimensioni del cerchio.

Ora vediamo che cos'hanno scoperto gli altri insetti riguardo alle

loro geometrie. Innanzitutto, che cosa succede all'insetto sulla sfera quando cerca di costruire un «quadrato»? Se segue le istruzioni che abbiamo dato sopra probabilmente concluderà che il gioco non vale la candela, visto che il risultato sarà come quello che si vede nella figura 32.

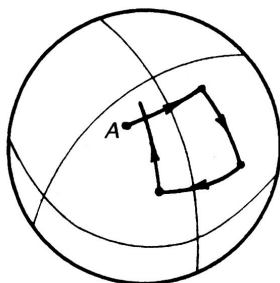


Fig. 32 - Tentativo di disegnare un «quadrato» su una sfera.

Il suo punto terminale *B* non coincide con il punto di partenza *A* ; non si ottiene affatto una figura chiusa (prendete una palla e fate la prova). Anche il nostro amico sulla piastra calda sperimenterebbe qualcosa di simile: se traccia quattro rette della stessa lunghezza - misurate con i suoi regoli che si dilatano - unite ad angolo retto ottiene quello che si vede alla figura 33.

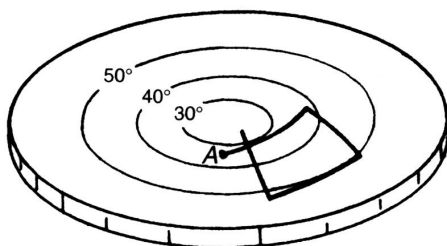


Fig. 33 - Tentativo di disegnare un «quadrato» sulla piastra calda.

E adesso supponiamo che ciascuno dei nostri insetti abbia il suo Euclide che ha spiegato come «dovrebbe» essere la geometria, e che loro abbiano fatto una verifica approssimativa con misurazioni (grossolane) su *piccola* scala. Disegnando quadrati più grandi, e con maggior precisione, si accorgerebbero che i conti non tornano. Il punto è che gli insetti riuscirebbero a stabilire cosa c'è che non va nel loro spazio con semplici *misurazioni geometriche*. Si definisce

curvo uno spazio la cui geometria non sia quella che ci si può aspettare in un piano. La geometria degli insetti sulla sfera, ma anche di quelli sulla piastra calda, è la geometria di uno spazio curvo in cui le regole euclidee non funzionano più. E non è necessario uscire dal piano per scoprire che il mondo in cui si vive è curvo; non è necessario circumnavigare il globo per scoprire che è una palla. Possiamo scoprire di vivere su una palla disegnando un quadrato: se è molto piccolo dovremo essere straordinariamente precisi, ma se è grande basta una misurazione più grossolana. Prendiamo il caso di un triangolo su un piano: la somma dei suoi angoli è di 180° , ma il nostro amico sulla sfera può trovare dei triangoli veramente singolari, per esempio triangoli con *tre angoli retti* - proprio così! Ne vediamo uno alla figura 34.

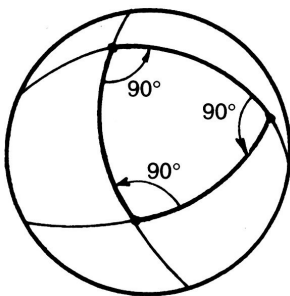


Fig. 34 - Su una sfera un «triangolo» può avere tre angoli di 90° .

Supponiamo che il nostro insetto parta dal polo nord e tracci una retta che scende fino all'equatore; poi gira ad angolo retto, traccia un'altra retta perfetta, della stessa lunghezza, poi fa di nuovo la stessa cosa... e data la particolare lunghezza che ha scelto ritorna al punto esatto di partenza, dove incontrerà il suo primo lato di nuovo ad angolo retto. Dunque per lui quel triangolo ha, senza alcun dubbio, tre angoli retti; se li sommiamo, 270° . In effetti per lui la somma degli angoli interni di un triangolo è *sempre* maggiore di 180° , e inoltre l'eccedenza (che nel caso particolare che abbiamo mostrato è di 90°) è proporzionale all'area del triangolo. Se un triangolo sferico è molto piccolo la somma dei suoi angoli è molto vicina a 180° , li supera di pochissimo; via via che il triangolo diventa più grande, la discrepanza aumenta. Anche l'insetto sulla piastra calda, con i suoi triangoli, incontrerebbe problemi analoghi.

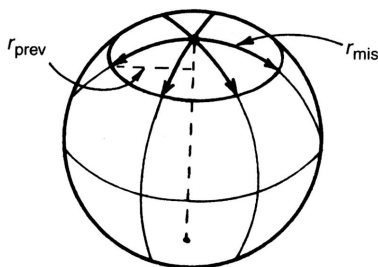


Fig. 35 - La costruzione di un cerchio su una sfera.

E adesso occupiamoci di quello che scoprono gli altri insetti riguardo ai cerchi. Li disegnano, misurano le circonferenze, e ad esempio l'insetto sulla sfera potrebbe tracciarne uno come quello che si vede nella figura 35; in tal caso scoprirebbe che la circonferenza è *meno* di 2π volte il raggio. (Potendo vedere le cose in tre dimensioni, è ovvio che quello che lui chiama «raggio» è una curva *più lunga* del vero raggio del cerchio). Ma supponiamo che l'insetto sulla sfera abbia letto Euclide e decida di prevedere quanto sarà lungo il raggio della circonferenza C dividendo quest'ultima per 2π , e anzi prenda proprio

$$r_{\text{prev}} = \frac{C}{2\pi} \quad . \quad (6.1)$$

A quel punto troverà che il raggio misurato è più lungo di quello previsto; procedendo su questa via potrebbe definire la differenza «eccesso del raggio», ponendo

$$r_{\text{mis}} - r_{\text{prev}} = r_{\text{ecc}}, \quad (6.2)$$

e studiare in che modo essa dipenda dalla grandezza del cerchio. L'insetto sulla piastra calda scoprirebbe un fenomeno analogo. Supponiamo che debba tracciare un cerchio con centro nel punto più freddo della piastra, come nella figura 36.

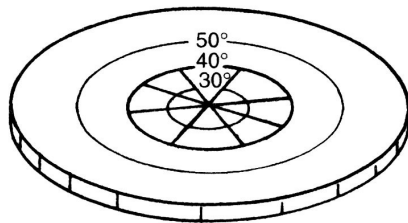


Fig. 36 - Cerchio tracciato su una piastra calda.

Dall'esterno si nota che in prossimità del centro i suoi righelli sono più corti e quando vengono spostati verso la periferia si allungano (ma naturalmente l'insetto non lo sa). Quando l'insetto misura la circonferenza il suo righello ha lunghezza costante, cosicché anche lui scopre che il raggio misurato è più lungo del valore previsto, $C/2\pi$. L'insetto sulla piastra trova anche lui un effetto «eccesso del raggio» - e l'entità di questo effetto dipende, ancora una volta, dal raggio del cerchio.

Definiremo «curvo» uno spazio in cui si presentino i seguenti errori geometrici: la somma degli angoli di un triangolo è diversa da 180° , la circonferenza divisa per 2π non è uguale al raggio, la regola per disegnare il quadrato non dà una figura chiusa... e ne possiamo pensare altri. Abbiamo dato due esempi diversi di spazio curvo, la sfera e la piastra calda, ma la cosa interessante è che scegliendo opportunamente la legge di variazione della temperatura in funzione della distanza sulla piastra, le due *geometrie* saranno esattamente uguali. È piuttosto divertente: possiamo fare in modo che l'insetto sulla piastra arrivi alle stesse conclusioni dell'insetto sulla sfera. Vi spiego - per quelli di voi che amano la geometria e i problemi geometrici - come fare: se supponiamo che la lunghezza dei righelli (determinata della temperatura) sia proporzionale a 1 più una certa costante per il quadrato della distanza dall'origine, scopriamo che la geometria della piastra è esattamente uguale, fin nei particolari,¹² a quella della sfera.

Naturalmente vi sono anche altri tipi di geometria. Potremmo investigare la geometria di un insetto che vive su una pera, cioè su un oggetto che in certe parti ha una curvatura più accentuata e in altre ne ha una più debole - per cui l'eccedenza degli angoli di un triangolo è più seria quando l'insetto disegna dei triangolini in una parte del suo universo piuttosto che in un'altra. In altre parole, la curvatura di

¹² Eccetto che per il punto all'infinito.

uno spazio può variare da punto a punto. Questa non è che una generalizzazione del concetto, che può essere imitata anche da una opportuna distribuzione di temperatura sulla piastra calda. Si può anche osservare che potrebbero venir fuori discordanze di segno opposto; potremmo scoprire, per esempio, che tutti i triangoli, quando diventano troppo grandi, hanno una somma degli angoli *minore* di 180° - forse suona impossibile, ma non lo è affatto. Innanzitutto potremmo avere una piastra con una temperatura che diminuisce man mano che ci si allontana dal centro, e a quel punto tutti gli effetti sarebbero invertiti. Ma si può ottenere il risultato anche per via puramente geometrica, osservando la geometria bidimensionale della superficie di una sella.

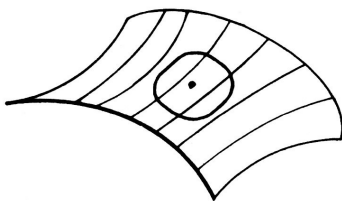


Fig. 37 - Un «cerchio» su una superficie a sella.

Supponiamo di avere una superficie a forma di sella come quella della figura 37 e tracciamo su questa superficie un «cerchio», definito come luogo di tutti i punti posti a uguale distanza dal centro; otterremo una figura che un po' va in fuori e un po' va in dentro, a mo' di festone, la cui circonferenza quindi è più lunga di quello che ci si aspetterebbe calcolando $2\pi r$. $C/2\pi$ è qui minore di r ; l'«eccesso» è negativo. Sfere, pere e simili sono tutte superfici a curvatura *positiva*, mentre le altre sono a curvatura *negativa*. Un universo bidimensionale avrà in generale una curvatura che varia da punto a punto e può essere positiva in un luogo e negativa in un altro. In generale, per spazio curvo si intende semplicemente uno spazio in cui le regole della geometria euclidea cessano di valere, con deviazioni in un senso o nell'altro. Anche l'entità della curvatura - definita, poniamo, dall'eccesso del raggio - può variare da punto a punto. È da notare che, in base alla nostra definizione di curvatura, un cilindro - cosa abbastanza sorprendente - non è curvo. Se un insetto abitasse su un cilindro (fig. 38) scoprirebbe che triangoli, cerchi e quadrati si comportano tutti esattamente come su un piano.

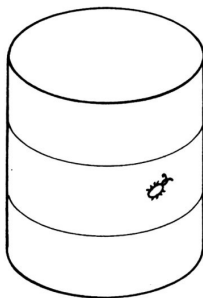


Fig. 38 - Uno spazio bidimensionale con curvatura intrinseca nulla.

Per convincersene, basta pensare a come si trasformerebbero queste figure se il cilindro venisse srotolato su un piano: possiamo sempre far sì che esse corrispondano esattamente alle stesse figure tracciate sul piano. Perciò un insetto che viva sul cilindro (e che non faccia il giro completo, ma prenda solo misure locali) non ha modo di scoprire che il suo spazio è curvo. Da un punto di vista tecnico, quindi, questo *non è* uno spazio curvo. La cosa che ci interessa qui è la curvatura *intrinseca*, cioè la curvatura che può essere scoperta attraverso semplici misurazioni locali (per un cilindro è nulla). Era questo che intendeva Einstein quando diceva che il nostro spazio è curvo. Ma per ora abbiamo definito solo uno spazio curvo a due dimensioni; dobbiamo andare avanti e scoprire cosa può significare tutto questo in tre dimensioni.

La curvatura nello spazio tridimensionale

Noi viviamo in uno spazio a tre dimensioni; ora vogliamo esaminare la possibilità che questo spazio sia curvo. «Ma come si può immaginare che si incurvi in qualche direzione?» direte voi. Certo, la nostra immaginazione non arriva a tanto - forse non è un male, così non perdiamo l'aggancio con il mondo reale -, ma possiamo sempre *definire* una curvatura tridimensionale anche senza uscire dal nostro mondo a tre dimensioni. Tutta la nostra discussione in due dimensioni non era in fondo che un esercizio, per mostrare che è possibile definire una curvatura senza che per questo si debba essere in grado

di «guardare» dal di fuori.

Possiamo stabilire se il nostro universo è curvo con un sistema del tutto simile a quello usato da quei due signori che vivevano sulla sfera e sulla piastra calda. Forse non riusciremo a distinguere tra questi due casi, ma di certo possiamo distinguerli dallo spazio piatto, dal piano ordinario. E come? Non è difficile: si traccia un triangolo e si misurano gli angoli. Oppure si fa un cerchio grandissimo e si misurano circonferenza e raggio. O magari si cerca di disegnare con precisione un quadrato, o anche un cubo. Volta per volta, verifichiamo se le leggi della geometria funzionano - e se non funzionano diciamo che il nostro spazio è curvo. Se tracciamo un triangolo di grandi dimensioni, e la somma dei suoi angoli supera i 180° , possiamo asserire che il nostro spazio è curvo; e così pure se in un cerchio la misura del raggio non è uguale alla circonferenza divisa per 2π .

Come si intuisce, in tre dimensioni la situazione può essere molto più complicata che in due. Con due dimensioni, in qualunque punto vi è un certo grado di curvatura; ma in tre dimensioni la curvatura può avere *diverse componenti*, e se disegniamo un triangolo su un certo piano il risultato può essere diverso da quello che si ottiene orientando quel piano in un altro modo. Supponiamo di tracciare un cerchio e di misurarne il raggio, e che questo non coincida con $C/2\pi$, ma sia in eccesso rispetto a questo valore. Tracciamo poi un altro cerchio ad angolo retto col primo, come alla figura 39: non è detto che l'eccedenza sia esattamente la stessa. Potrebbe esservi infatti un eccesso positivo in un caso e un difetto (eccesso negativo) nell'altro.

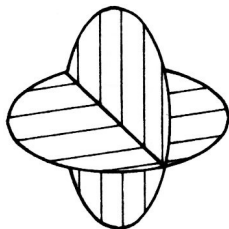


Fig. 39 - L'eccesso del raggio può variare a seconda dell'orientazione.

Ma forse vi è già venuta un'idea migliore: non potremmo liberarci di tutte queste componenti e usare, in tre dimensioni, una *sfera*? Possiamo ottenere una sfera prendendo tutti i punti che si trovano a uguale distanza da un dato punto nello spazio, dopo di che misuriamo l'area della superficie tracciando su di essa una quadrettatura

molto fine e sommando tutte queste aree parziali. Stando a Euclide, l'area totale A dovrebbe essere 4π volte il quadrato del raggio; possiamo quindi definire un «raggio previsto» dato da $\sqrt{A/4\pi}$. Ma possiamo anche misurare il raggio direttamente, scavando un pozzo fino al centro della sfera e misurando la distanza. Di nuovo, possiamo prendere la differenza fra raggio misurato e raggio previsto e chiamarla raggio in eccesso,

$$r_{\text{ecc}} = r_{\text{mis}} - \left(\frac{\text{area misurata}}{4\pi} \right)^{1/2}.$$

In tal modo si ottiene una misura della curvatura che ha il vantaggio di non dipendere da come orientiamo un triangolo o un cerchio. Il rovescio della medaglia è che l'eccesso del raggio non caratterizza completamente lo spazio. Dà semplicemente quella che viene chiamata la *curvatura media* dell'universo in tre dimensioni, perché equivale a fare una media delle diverse curvature, ma non risolve del tutto il problema di definire la geometria - proprio perché è una media. La conoscenza di quest'unico numero non consente di prevedere tutte le proprietà geometriche dello spazio, perché non sappiamo cosa succede con cerchi aventi orientazioni diverse. La definizione completa della curvatura richiede in ogni punto sei «coefficienti di curvatura». Naturalmente i matematici sanno come scrivere questi coefficienti. E potrete leggere un giorno, in un trattato di matematica, come esprimerli in forma matematicamente molto elegante. Per ora può essere utile avere almeno una nozione approssimativa di ciò che si cerca di mettere in formule. Comunque, per la maggior parte dei nostri scopi la curvatura media è più che sufficiente.¹³

¹³ Per completezza, dovremmo ricordare ancora un particolare. Se vogliamo trasportare in tre dimensioni il modello di spazio curvo della piastra calda, dobbiamo immaginare che la lunghezza dei righelli dipenda non solo da dove vengono collocati, ma anche dalla loro orientazione. Nel caso più semplice da noi esaminato la lunghezza del righello dipendeva dal punto, ma era la stessa in ogni direzione. Questa generalizzazione è necessaria se si desidera che il modello possa descrivere uno spazio tridimensionale con una geometria arbitraria, mentre non è indispensabile in due dimensioni.

Il nostro spazio è curvo

E ora veniamo alla domanda principale: ma è proprio così? Lo spazio fisico a tre dimensioni in cui viviamo è realmente curvo? Dato che abbiamo abbastanza immaginazione per renderci conto di questa possibilità, è naturale che la nostra mente si incuriosisca e voglia sapere se il nostro universo reale è curvo oppure no. Per cercare di scoprirlo sono state fatte misure geometriche dirette, ma senza risultato. D'altra parte, ragionando sulla gravitazione, Einstein poté stabilire che l'universo è realmente curvo; vorrei allora spiegarvi qual è la legge da lui trovata per l'entità della curvatura, e anche rifare un po' la storia di quella scoperta.

Einstein dunque dice che lo spazio è curvo e che causa della curvatura è la materia. (La materia è anche all'origine della gravitazione, e quindi la gravità è in rapporto con la curvatura; ma di questo si parlerà più avanti). Supponiamo, per semplificare le cose, che la materia sia distribuita con continuità, anche se con densità variabile quanto si vuole da punto a punto.¹⁴ Ciò posto, la regola data da Einstein per la curvatura è la seguente: se in una regione dello spazio è presente della materia e prendiamo una sfera abbastanza piccola perché al suo interno la densità ρ di materia sia praticamente costante, l'eccesso del raggio di questa sfera è proporzionale alla sua massa. Data la nostra definizione di eccesso del raggio abbiamo, più esattamente,

$$\text{eccesso del raggio} = \sqrt{\frac{A}{4\pi}} - r_{\text{mis}} = \frac{G}{3c^2} \cdot M \quad . \quad (6.3)$$

In questo caso G è la costante di gravitazione (della teoria newtoniana), c è la velocità della luce e $M=4\pi\rho r^3/3$ è la massa contenuta all'interno della sfera. La legge einsteiniana della curvatura media dello spazio è questa. Consideriamo ad esempio la Terra, dimenticando che la sua densità varia da punto a punto (così non dovremo calcolare integrali), e immaginiamo di misurare molto accuratamente la sua superficie e di trivellarla fino al centro, misurandone la profondità. Dall'area della superficie, posta uguale a $4\pi r^2$, possiamo calco-

¹⁴ La legge sarebbe impossibile da ricavare, anche per Einstein, se la massa fosse concentrata in punti.

lare il raggio; a quel punto, confrontando il valore previsto con quello effettivo, scopriremmo che il secondo supera il primo della quantità data dalla (6.3). La costante vale circa $2,5 \times 10^{-29}$ centimetri per grammo, cioè il raggio misurato sopravanza quello previsto di $2,5 \times 10^{-29}$ centimetri per ogni grammo di materia presente. Se inseriamo nell'espressione la massa della Terra, che è di circa 6×10^{27} grammi, viene fuori che il nostro pianeta ha un raggio di 1,5 millimetri più lungo di quanto dovrebbe essere, data l'area della sua superficie.¹⁵ Se poi facciamo lo stesso calcolo per il Sole, scopriamo che il suo raggio è troppo lungo di circa mezzo chilometro.

È da notare che questa legge dice che la curvatura *media*, valutata su una piccola sfera *al di sopra* della superficie terrestre, è nulla; ma questo *non* significa che siano nulle tutte le sue componenti. Sopra la nostra Terra può ugualmente esserci - anzi c'è - una certa curvatura; un cerchio in un piano avrà un eccesso del raggio positivo per alcune orientazioni, e negativo per altre. Si trova appunto che la media su una sfera è nulla quando non c'è massa *all'interno*. (Per inciso, esiste una relazione fra le varie componenti della curvatura e la *variazione* della curvatura media da punto a punto). Quindi, nonostante la curvatura media al di sopra della Terra sia nulla, non tutte le sue componenti lo sono, e lo spazio è curvo. Ed è questa curvatura che interpretiamo come forza di gravità.

Torniamo all'insetto sul piano, ma ora supponiamo che questo «piano» abbia delle bollicine sulla sua superficie. Ovunque vi sia una bolla, l'insetto concluderà che il suo spazio ha localmente una minuscola regione con curvatura non nulla. In tre dimensioni succede la stessa cosa: ovunque vi sia un accumulo di materia, il nostro spazio tridimensionale ha una curvatura locale, una sorta di bolla in tre dimensioni.

Se in un piano vi sono molti rigonfiamenti, ci potrebbe essere, oltre alla curvatura delle singole bolle, una curvatura complessiva; la superficie potrebbe diventare una sorta di palla. Sarebbe interessante sapere se il nostro spazio ha pure una curvatura media netta, oltre alle bolle locali dovute ad accumuli di materia come la Terra e il Sole. Gli astrofisici hanno cercato di risolvere questo problema facendo conteggi di galassie remote: se per esempio il numero di galassie che osserviamo in un guscio sferico a grande distanza fosse di-

¹⁵ Solo approssimativamente, perché la densità non è indipendente dal raggio, come stiamo supponendo.

verso da quello che ci aspetteremmo in base alla nostra conoscenza del raggio del guscio, avremmo una misura dell'eccesso del raggio di una sfera straordinariamente grande. Da simili misure si spera di scoprire se l'intero universo è mediamente piatto o rotondo - se è «chiuso» come una sfera o «aperto» come un piano. Forse vi è giunta l'eco delle discussioni in corso su questo argomento. La questione è dibattuta perché per il momento le misure astronomiche sono inconcludenti; i dati sperimentali non sono abbastanza precisi per darci una risposta definitiva. Purtroppo non abbiamo la minima idea di quale sia la curvatura complessiva del nostro universo a grande scala.

La geometria dello spazio-tempo

Ora dobbiamo parlare del tempo. Come sappiamo dalla teoria ristretta della relatività, le misure di spazio e di tempo sono correlate, e sarebbe abbastanza insensato se accadesse qualcosa nello spazio senza che anche il tempo ne venisse coinvolto. Ricorderete che le misure di tempo dipendono dalla velocità alla quale ci si muove, e se per esempio osserviamo qualcuno che viaggia su una nave spaziale vediamo che per lui tutto si svolge più lentamente che per noi. Se si mette in viaggio e ritorna dopo 100 secondi spaccati *del nostro orologio*, dal *suo* orologio potrebbe sembrare che siano trascorsi soltanto 95 secondi. In confronto al nostro, il suo orologio - e ogni altro processo, come il battito cardiaco - ha rallentato. Consideriamo ora un problema interessante.

Supponiamo che siate voi sulla nave spaziale: vi si chiede di partire a un certo segnale e di tornare alla base di partenza giusto in tempo per ricevere un nuovo segnale - mettiamo, esattamente dopo 100 secondi, nel tempo del *nostro* orologio. Vi si chiede inoltre di compiere il viaggio in modo che il *vostro* orologio segni alla fine il tempo *più lungo possibile*. Come vi dovreste muovere? Dovreste rimanere fermi! Se vi muoveste anche di poco, al vostro ritorno il vostro orologio segnerebbe meno di 100 secondi.

Cambiamo leggermente il problema. Supponiamo che vi venga richiesto di partire a un certo segnale dal punto *A* e di andare fino al

punto *B* (entrambi fissi rispetto a noi) e di tornare indietro, facendo in modo di arrivare nell'istante preciso di un secondo segnale (mettiamo, 100 secondi dopo, letti sul nostro orologio). Anche stavolta, il vostro orologio dovrà segnare alla fine il tempo più lungo possibile. Che cosa farete? Con quale percorso e con quale tabella oraria il *vo-**stro* orologio segnerà, quando arriverete, il maggior numero di secondi? La risposta è che dal *vo-**stro* punto di vista impiegherete il tempo più lungo andando a velocità uniforme e in linea retta. Ogni moto in più, ogni ulteriore incremento di velocità rallenterebbe infatti il vostro orologio. (Poiché le deviazioni temporali dipendono dal quadrato della velocità, quello che si perde andando più veloci in un tratto non si potrà mai compensare con un'andatura superlenta in un altro tratto).

Il succo del discorso è che si può usare questa idea per definire una «linea retta» nello spaziotempo. Nello spazio-tempo, l'analogo di una retta nello spazio è un *moto* a velocità uniforme in direzione costante.

La curva più breve nello spazio corrisponde, nello spazio-tempo, non al percorso di durata minima ma a quello di durata *massima*, e questo si deve alle strane cose che si verificano per via del segno dei termini *temporali* in relatività. Il moto «rettilineo» - l'analogo della «velocità uniforme in linea retta» - è dunque il moto che trasporta un orologio, da un certo punto dello spazio-tempo a un altro punto dello spazio-tempo in modo da fargli segnare la durata più lunga. Questa sarà la nostra definizione per l'analogo di una retta nello spazio-tempo.

La gravità e il principio di equivalenza

Siamo ora pronti a discutere le leggi della gravitazione. Einstein cercava di costruire una teoria della gravitazione che fosse coerente con la teoria della relatività da lui elaborata in precedenza. Continuò tenacemente nella sua ricerca finché afferrò un importante principio che lo guidò verso le leggi corrette. Questo principio si fonda sull'idea che quando un oggetto cade liberamente, tutto ciò che si trova al suo interno sembra privo di peso. Un satellite in orbita, per esempio,

è in caduta libera nel campo gravitazionale terrestre, e agli astronauti sembra di essere senza peso. Questa idea, formulata con maggior precisione, porta il nome di *principio di equivalenza di Einstein*. Questo dipende dal fatto che tutti i corpi cadono con la stessa accelerazione, indipendentemente dalla loro massa e dalla loro composizione. Se un'astronave viaggia a motori spenti - ossia è in caduta libera - e dentro c'è un uomo, le leggi che governano la caduta dell'uomo e della nave sono le stesse. Se l'uomo si mette nel mezzo della nave, resterà lì. In altri termini, non cade *rispetto alla nave*. Proprio questo intendiamo quando diciamo che è «privo di peso». Supponiamo ora di trovarci su una nave spaziale, azionata da un razzo, che sta accelerando. Ma rispetto a che cosa? Diciamo semplicemente che i motori sono accesi e generano una spinta, e che il razzo non è più in caduta libera. Immaginiamo anche di essere molto lontani, nel vuoto interstellare, per cui in pratica sulla nave non agisce nessuna forza gravitazionale. Se la nave accelera a «1 g» - circa $9,81 \text{ m/s}^2$ - riusciamo a stare in piedi sul «pavimento» e avvertiamo il nostro peso normale. Se lasciamo andare una palla, questa «cadrà» verso il pavimento. Come mai? Perché la nave accelera «verso l'alto». La palla, invece, non è soggetta a forze e quindi non accelera; viene lasciata indietro. Ma nella nave sembrerà che essa abbia un'accelerazione di «1 g» verso il basso.

Confrontiamo ora questa situazione con quella di un'astronave ferma sulla superficie terrestre. *Tutto è lo stesso!* Avvertiremmo una pressione verso il pavimento, una palla cadrebbe con un'accelerazione di 1g, e così via. Ma allora, se stiamo dentro un'astronave, come facciamo a sapere se siamo fermi a terra o acceleriamo nello spazio vuoto? In base al principio di equivalenza di Einstein, se misuriamo solo i processi che hanno luogo all'interno non c'è modo di saperlo.

A rigore, questo è vero solo per un unico punto all'interno dell'astronave. Il campo gravitazionale della Terra non è perfettamente uniforme, e quindi un corpo in caduta libera avrà accelerazioni lievemente diverse a seconda del luogo - cambieranno sia la direzione sia l'entità dell'accelerazione. Ma se immaginiamo di avere un campo gravitazionale rigorosamente uniforme, esso sarà del tutto indistinguibile da un sistema con un'accelerazione costante. La base del principio di equivalenza è questa.

Il ritmo degli orologi in un campo gravitazionale

Applicheremo ora il principio di equivalenza per spiegare un fatto molto strano che accade in un campo gravitazionale. Parlerò di un fenomeno che accade su un razzo e che probabilmente non vi sareste mai aspettati in un campo gravitazionale. Supponiamo di mettere un orologio nella «testa» del razzo - l'estremità «anteriore» - e di metterne uno identico nella «coda», come nella figura 40.

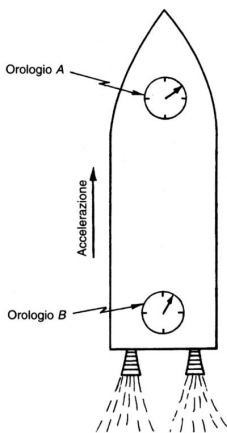


Fig. 40 - Un razzo in accelerazione con due orologi.

Chiameremo *A* e *B* i due orologi. Se si confrontano questi orologi mentre il razzo sta accelerando, l'orologio *A* sembrerà in anticipo rispetto all'orologio *B*.

Per vedere come stanno le cose, immaginiamo che l'orologio di testa emetta un lampo di luce ogni secondo e che un osservatore, nella coda del razzo, confronti l'arrivo dei segnali luminosi coi ticchettii dell'orologio *B*. Supponiamo che il razzo sia nella posizione (a) della figura 41 quando l'orologio *A* emette un lampo e nella posizione (b) quando il lampo raggiunge l'orologio *B*.

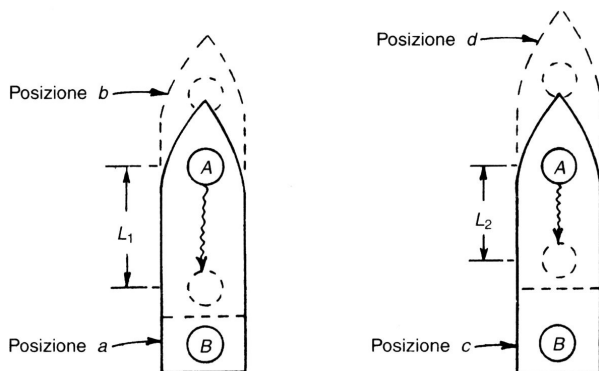


Fig. 41 - L'orologio che si trova nella testa di un razzo che accelera sembra avere un ritmo più lapido dell'orologio nella coda.

Quando A emetterà il lampo successivo il razzo sarà nella posizione (c), e nella posizione (d) quando vedremo il lampo raggiungere B. Il primo lampo copre la distanza L_1 e il secondo la distanza L_2 , che è più breve perché il razzo sta accelerando e al momento del secondo lampo è più veloce. Come si vede, se i due lampi sono emessi dall'orologio A a un secondo di distanza, essi arriverebbero all'orologio B con una separazione un po' minore di un secondo, perché il secondo lampo impiega meno tempo nel tragitto. Lo stesso accadrà per tutti i lampi successivi. Un osservatore seduto nella coda concluderà che l'orologio A va più rapidamente di B. Se si procedesse all'incontrario, e i segnali venissero emessi da B, un osservatore seduto nella testa dirà che B è più lento di A. Tutto si accorda, e nella faccenda non c'è niente di misterioso. Immaginiamo ora che il razzo sia in quiete nel campo gravitazionale terrestre: *succede la stessa cosa*. Se stiamo seduti sul pavimento con un orologio in mano e ne osserviamo un altro molto in alto su uno scaffale, ci sembrerà che il secondo vada più in fretta! Direte: «Ma è sbagliato, l'ora segnata dev'essere la stessa; se non c'è accelerazione, perché dovrebbero avere un ritmo diverso?». E invece devono avere ritmi diversi, se il principio di equivalenza è giusto. Einstein sosteneva che il principio era giusto, e andò avanti coraggiosamente (e i fatti gli diedero ragione). Egli propose che di due orologi posti in punti diversi in un campo gravitazionale uno dovesse sembrare più veloce dell'altro. Ma se uno *sembra* andare sempre a velocità diversa rispetto all'altro, allora dal punto di vista del primo il secondo *va davvero* a una velocità diversa. Abbiamo qui l'analogo, per gli orologi, della dilatazione del righello

di cui si parlava a proposito dell'insetto sulla piastra riscaldata. Avevamo supposto che, al variare della temperatura, ogni cosa - righelli, insetti e quant'altro - cambiasse di lunghezza in egual misura, per cui gli insetti, muovendosi sulla piastra, non potevano accorgersi che i loro righelli cambiavano. È lo stesso con gli orologi in un campo gravitazionale. Ogni orologio, quando viene posto più in alto, va a un ritmo più rapido. Così come il battito cardiaco e ogni altro processo.

Se così non fosse, potremmo distinguere fra un campo gravitazionale e un sistema di riferimento accelerato. L'idea che il tempo possa variare da un luogo all'altro è difficile, ma è l'idea che Einstein ha adoperato, ed è corretta - che lo crediate o no.

Applicando il principio di equivalenza si può stabilire di quanto varia il ritmo di un orologio con l'altezza in un campo gravitazionale; basta ricavare l'apparente discordanza tra i due orologi nel razzo che accelera. Il modo più facile è di usare la formula dell'effetto Doppler trovata nel primo volume (*Lectures on Physics*, vol. I, cap. 34, eq. (34.14), e menzionato qui alla fine del capitolo 5, p. 166), per la quale, se v è la velocità *relativa* di una sorgente rispetto a un ricevitore, la frequenza *ricevuta* ω e la frequenza *emessa* ω_0 sono legate dalla relazione

$$\omega = \omega_0 \frac{1 + v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad . \quad (6.4)$$

Nel caso del razzo illustrato nella figura 40, l'emettitore e il ricevitore si muovono, in ogni istante, alla stessa velocità. Ma nel tempo che impiega un segnale luminoso per andare dall'orologio A all'orologio B il razzo ha accelerato, acquistando la velocità supplementare gt , dove g è l'accelerazione e t è il tempo che la luce impiega a coprire la distanza H da A a B . Questo tempo è quasi esattamente uguale a H/c , e quindi, quando i segnali arrivano a B , la velocità del razzo è aumentata di gH/c . Il ricevitore ha sempre questa velocità *rispetto* all'emettitore, all'istante in cui il segnale è partito. Perciò è questa la velocità che dobbiamo usare nell'equazione (6.4), la formula dello spostamento Doppler. Supponendo che l'accelerazione e la lunghezza del razzo siano abbastanza piccole, possiamo trascurare il termine in v^2/c^2 e otteniamo

$$\omega = \omega_0 \left(1 + \frac{gH}{c^2} \right) . \quad (6.5)$$

Perciò fra i due orologi nel razzo vale la relazione

$$(\text{Freq. ricez.}) = (\text{Freq. emiss.}) \left(1 + \frac{gH}{c^2} \right) , \quad (6.6)$$

dove H è l'altezza dell'emettitore sopra il ricevitore. *In base al principio di equivalenza, per due orologi separati da un dislivello H in un campo gravitazionale - con accelerazione di caduta libera pari a g - deve valere lo stesso risultato.* Questa idea - di capitale importanza - può essere ricavata da un'altra legge fisica, quella della conservazione dell'energia. Sappiamo che la forza gravitazionale che agisce su un corpo è proporzionale alla sua massa M , che a sua volta è legata alla energia interna totale E dalla relazione $M=E/c^2$. Per esempio, le masse dei nuclei ricavate dalle *energie* delle reazioni che trasmutano un nucleo in un altro concordano con quelle ricavate dai *pesi* atomici.

Immaginiamo ora un atomo che nel suo stato di più bassa energia ha energia totale E_0 , in uno stato di energia più alto ha l'energia E_1 e che può passare dallo stato E_1 allo stato E_0 emettendo luce. La frequenza ω di tale luce sarà data da

$$\hbar\omega = E_1 - E_0. \quad (6.7)$$

Supponiamo ora di avere un atomo di questo tipo, nello stato E_1 che se ne sta sul pavimento e di portarlo all'altezza H . Per questo dobbiamo compiere un certo lavoro nel sollevare la massa $m_1 = E_1/c^2$ contro la forza di gravità e questo lavoro è

$$\frac{E_1}{c^2} gH . \quad (6.8)$$

Poi supponiamo che l'atomo emetta un fotone, passando nello stato di energia più bassa E_0 . Dopo lo riportiamo sul pavimento. Nel percorso di ritorno la massa è E_0/c^2 , dunque recuperiamo l'energia

$$\frac{E_0}{c^2} gH \quad , \quad (6.9)$$

e il lavoro complessivo è

$$\Delta U = \frac{E_1 - E_0}{c^2} gH \quad . \quad (6.10)$$

Quando l'atomo ha emesso il fotone, ha ceduto l'energia $E_1 - E_0$. Supponiamo ora che questo fotone sia finito sul pavimento e ne sia stato assorbito: quanta energia avrà ceduto? Si potrebbe pensare a prima vista che tale energia sia $E_1 - E_0$; ma se c'è conservazione dell'energia questa non può essere la risposta giusta, come mostra il seguente ragionamento. Inizialmente avevamo al livello del pavimento l'energia E_1 ; alla fine l'energia a livello del pavimento è l'energia E_0 dell'atomo nel suo stato più basso più l'energia E_f ricevuta dal fotone. Nel frattempo però abbiamo dovuto fornire anche l'energia supplementare ΔU secondo l'equazione (6.10). Se l'energia si conserva, l'energia finale al livello del pavimento deve superare quella di partenza di una quantità pari al lavoro compiuto. Si deve avere cioè

$$\begin{aligned} E_f + E_0 &= E_1 + \Delta U, \text{ ovvero} \\ E_f &= (E_1 - E_0) + \Delta U. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Perciò il fotone deve toccare il pavimento con un'energia che non è la $E_1 - E_0$ con la quale era partito *ma un po' più grande*, o dell'energia andrebbe perduta. Se nella equazione (6.11) sostituiamo a ΔU il valore trovato nella (6.10), vediamo che il fotone raggiunge il pavimento con l'energia

$$E_f = (E_1 - E_0) \left(1 + \frac{gH}{c^2} \right) \quad . \quad (6.12)$$

Ma un fotone di energia E_f ha la frequenza $\omega = E_f/\hbar$ e se chiamiamo ω_0 la frequenza del fotone emesso, che per l'equazione (6.7) è uguale a $(E_1 - E_0)/\hbar$, il risultato dell'equazione (6.12) ci dà nuovamente la relazione della (6.5) tra la frequenza del fotone quando è assorbito dal pavimento e quella che ha quando viene emesso. È possibile ot-

tenere lo stesso risultato anche per un'altra via. Un fotone con la frequenza ω_0 ha l'energia $E_0 = \hbar\omega_0$, e poiché l'energia E_0 ha la massa gravitazionale E_0/c^2 il fotone ha una massa (*non* in quiete) $\hbar\omega_0/c^2$ ed è «attratto» dalla Terra; ma cadendo per la distanza H acquisterà un'energia addizionale $(\hbar\omega_0/c^2)gH$, per cui arriverà con l'energia complessiva

$$E = \hbar\omega_0 \left(1 + \frac{gH}{c^2} \right) .$$

Dopo la caduta però la sua frequenza è $E/\hbar$, il che ci dà di nuovo il risultato dell'equazione (6.5). Così le nostre idee sulla relatività, la fisica quantistica e l'energia sono compatibili le une con le altre solo se le previsioni di Einstein sul comportamento degli orologi in un campo gravitazionale sono giuste. Normalmente, quei cambiamenti di frequenza di cui stiamo parlando sono molto piccoli: per esempio per una differenza di quota di 20 metri vicino alla superficie terrestre abbiamo una variazione di due parti (circa) su 10^{15} . Epperò, recentemente una differenza di questa entità è stata scoperta in via sperimentale usando l'effetto Mössbauer.¹⁶ Einstein, dunque, aveva ragione.

La curvatura dello spazio-tempo

Ora vogliamo mettere in relazione quello di cui abbiamo appena parlato con l'idea dello spaziotempo curvo. Abbiamo già osservato che se il tempo ha un ritmo diverso in luoghi diversi, la cosa è analoga allo spazio curvo della piastra calda. Ma è più che un'analogia; ciò significa che lo spazio-tempo *è* curvo. Proviamo a studiare un po' la sua geometria: da principio questa potrà sembrarci molto strana, ma abbiamo già fatto diversi diagrammi dello spazio-tempo con la distanza su un asse e il tempo sull'altro.

¹⁶ R.V. Pound e G.A. Rebka, Jr., *Apparent Weight of Photons*, «Physical Review Letters», IV (1960), p. 337.

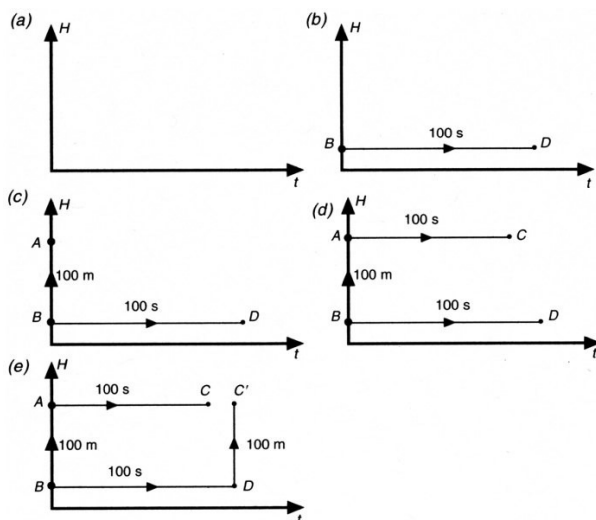


Fig. 42 - Tentativo di costruire un rettangolo nello spazio-tempo.

Proviamo dunque a costruire un rettangolo spaziotemporale; cominciamo con un grafico dell'altezza H in funzione di t come nella figura 42a. Per costruire la base del nostro rettangolo prendiamo un oggetto *in quiete* all'altezza H_1 e seguiamo la sua linea d'universo per 100 secondi; nella parte (b) della figura otteniamo la linea BD , parallela all'asse t . E ora prendiamo un altro oggetto che sta 100 metri più su a $t=0$. La sua linea d'universo parte dal punto A nella figura 42c; seguiamola per 100 secondi (tempo di un orologio collocato in A). L'oggetto passa da A a C come si vede in (d); ma è da notare che poiché alle due quote il tempo scorre a velocità diverse (stiamo supponendo che ci sia un campo gravitazionale) i punti C e D non sono simultanei. Se cerchiamo di completare il quadrato disegnando (fig. 42e) una linea fino al punto C' , che sta 100 metri più su di dove sta D nello stesso istante, i diversi pezzi non combaciano; ed è questo che intendiamo dicendo che lo spazio-tempo è curvo.

Il moto nello spazio-tempo curvo

Consideriamo ora un interessante piccolo rompicapo. Abbiamo due orologi identici A e B , posti uno accanto all'altro sulla superficie ter-

restre, come nella figura 43. Ora solleviamo *A* a una certa altezza *H*, lo teniamo lì per un po' e poi lo rimettiamo a terra in modo che arrivi nell'esatto istante in cui *B* completa il centesimo secondo. L'orologio *A* segnerà qualcosa come 107 secondi, perché andava più rapidamente mentre era in alto.

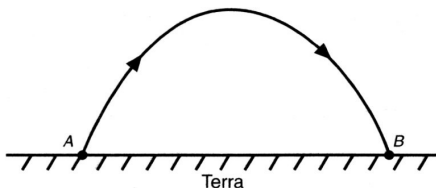


Fig. 43 In un campo gravitazionale uniforme, la traiettoria che dà il tempo proprio massimo, dato un tempo al suolo fisso, è una parabola.

E adesso il rompicapo: come si dovrebbe muovere *A* perché segni il tempo più lungo possibile - sempre ammettendo che ritorni quando *B* segna 100 secondi? «Facilissimo. Portiamo *A* il più in alto possibile. Allora andrà il più veloce possibile e al ritorno segnerà il tempo più lungo». Sbagliato! Dimenticate una cosa: abbiamo appena 100 secondi per salire e ridiscendere; dunque se andiamo molto in alto dobbiamo andare molto in fretta per arrivare là e tornare indietro in 100 secondi. E non bisogna dimenticare l'effetto della relatività ristretta che fa *rallentare* gli orologi in movimento di un fattore $\sqrt{1-v^2/c^2}$. È un effetto che di per sé porterebbe l'orologio *A* a segnare un tempo *minore* di quello dell'orologio *B*. Come si vede, dobbiamo giocare una specie di gioco. Se saliamo lentamente fino a un'altezza modesta e lentamente ridiscendiamo, può essere che *A* segni un po' più di 100 secondi; se andiamo un po' più in alto forse guadagniamo qualcosa di più, ma se andiamo troppo su dobbiamo muoverci molto velocemente per arrivarci, e in questo modo può accadere che l'orologio rallenti fino a segnare meno di 100 secondi. Qual è la programmazione dell'altezza e del ritmo, della quota a cui salire e della velocità ascensionale - il tutto attentamente calibrato in modo da riportarci a *B* quando quest'ultimo è andato avanti di 100 secondi - che fa segnare ad *A* il tempo più lungo?

Risposta: calcolare la velocità alla quale dobbiamo lanciare in aria una palla perché torni a terra in 100 secondi esatti. Il moto della palla - che sale veloce, poi rallenta, si ferma e ridiscende - è proprio quello che farà segnare il tempo più lungo a un orologio che le sia

stato attaccato. E adesso prendiamo un gioco leggermente diverso: sulla superficie terrestre ci sono due punti A e B a una certa distanza l'uno dall'altro, e giochiamo lo stesso gioco di prima per trovare quella che chiamiamo linea retta. Chiediamo cioè come si fa ad andare da A a B in modo che il tempo segnato dal nostro orologio in movimento sia massimo, sempre nell'ipotesi di partire da A a un certo segnale e arrivare in B a un certo altro segnale emesso 100 secondi dopo - tempo di un orologio fisso. Direte: «Abbiamo già visto che bisogna percorrere una retta a una velocità costante scelta in modo da arrivare in B dopo 100 secondi esatti. Se non andiamo in linea retta dovremo essere più veloci, e il nostro orologio rallenterà». Calma! Questo andava bene prima che prendessimo in considerazione la gravità, ma adesso non sarebbe meglio salire un poco e poi ridiscendere in modo da stare più in alto, con un orologio che va più veloce, durante una parte del viaggio? Certo. Se risolviamo il problema matematico di trovare la curva che faccia segnare all'orologio in movimento il tempo più lungo possibile scopriamo che è una parabola, la stessa traiettoria percorsa da un oggetto in moto balistico libero entro un campo gravitazionale, come nella figura 43, e dunque la legge del moto gravitazionale può essere formulata anche così: *un oggetto si sposta sempre da un luogo a un altro in modo che se trasporta un orologio questo segni un tempo più lungo di quello che segnerebbe con qualsiasi altra traiettoria possibile* - date, ovviamente, le stesse condizioni di partenza e di arrivo. Il tempo segnato da un orologio in movimento viene chiamato molto spesso «tempo proprio», e la traiettoria di caduta libera massimizza il tempo proprio di un oggetto.

Ma adesso vediamo come funziona la cosa. Partiamo dall'equazione (6.5), in base alla quale l'«eccesso di frequenza» dell'orologio in movimento è

$$\frac{\omega_0 g H}{c^2} . \quad (6.13)$$

Dobbiamo anche ricordare, però, che esiste una correzione di segno opposto per la velocità. Sappiamo che a causa di questo effetto

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 - v^2/c^2} .$$

Benché il principio sia valido per tutte le velocità, consideriamo un esempio in cui queste sono sempre molto inferiori a c . In un caso del genere possiamo scrivere l'equazione così,

$$\omega = \omega_0(1 - v^2/2c^2),$$

e il difetto di frequenza del nostro orologio sarà

$$-\omega_0 \frac{v^2}{2c^2} . \quad (6.14)$$

Combinando i due termini in (6.13) e (6.14) otteniamo

$$\Delta \omega = \frac{\omega_0}{c^2} \left(gH - \frac{v^2}{2} \right) . \quad (6.15)$$

Questo cambiamento di frequenza del nostro orologio in movimento implica che se misuriamo un intervallo temporale dt con un orologio fisso, per quello in movimento il tempo trascorso sarà

$$dt \left[1 + \left(\frac{gH}{c^2} - \frac{v^2}{2c^2} \right) \right] . \quad (6.16)$$

Il tempo totale in eccesso su tutta la traiettoria è l'integrale rispetto al tempo del termine additivo, ossia

$$\frac{1}{c^2} \int \left(gH - \frac{v^2}{2} \right) dt , \quad (6.17)$$

che si presume sia un massimo. Il termine gH non è altro che il potenziale gravitazionale ϕ . Supponiamo di moltiplicare tutta l'espressione per una costante $-mc^2$, dove m è la massa dell'oggetto: questa costante non cambierà le condizioni di massimalità, ma il segno meno trasformerà il massimo in un minimo, e a quel punto l'equa-

zione (6.16) dirà che l'oggetto si muove in modo tale che

$$\int \left(\frac{mv^2}{2} - m\phi \right) dt = \text{un minimo.} \quad (6.18)$$

Ma ora l'integrando non è che la differenza fra energia cinetica ed energia potenziale, e se date un'occhiata al capitolo 19 (delle *Lectures on Physics*, vol. II) vedrete che quando abbiamo discusso il principio di minima azione abbiamo dimostrato che le leggi di Newton per un oggetto con un potenziale qualsiasi possono essere scritte nella stessa esatta forma dell'equazione (6.18).

La teoria di Einstein della gravitazione

Alle basse velocità la forma einsteiniana delle equazioni del moto, per la quale il tempo proprio deve essere massimale in uno spazio-tempo curvo, dà gli stessi risultati delle leggi di Newton. Mentre Gordon Cooper girava intorno alla Terra, il suo orologio andava più lento di come sarebbe andato in qualsiasi altro percorso immaginabile per il suo satellite.¹⁷

I concetti della geometria dello spazio-tempo ci permettono dunque di enunciare la legge di gravitazione in una forma veramente notevole: una particella impiega sempre il tempo proprio più lungo - e nello spazio-tempo il «massimo tempo proprio» è una quantità analoga alla «minima distanza». La legge del moto in un campo gravitazionale è questa, e il grande vantaggio di una simile formulazione è che così la legge non dipende né da un sistema di coordinate né da un qualsiasi altro modo di definire la situazione sperimentale. E adesso ricapitoliamo quello che abbiamo fatto finora. Abbiamo dato due leggi per la gravità che descrivono:

1) come la geometria dello spazio-tempo cambia quando è presente della materia - in altri termini, la curvatura espressa in funzione del-

¹⁷ A rigore però si tratta solo di un massimo *locale*, e avremmo dovuto precisare che il tempo proprio è maggiore rispetto a quello di tutti i percorsi *vicini*. Non è detto, per esempio, che il tempo proprio di un'orbita ellittica intorno alla Terra sia più lungo di quello della traiettoria balistica di un oggetto sparato a una grande altezza e che ricade al suolo.

l'eccesso del raggio è proporzionale alla massa interna a una sfera (eq. 6.3);

2) come si muovono gli oggetti quando vi sono solo forze gravitazionali - in altri termini, gli oggetti si muovono in modo che il loro tempo proprio tra le due condizioni terminali sia massimo.

Queste due leggi corrispondono ad analoghe coppie di leggi che avevamo considerato in precedenza. Inizialmente avevamo descritto il moto in un campo gravitazionale per mezzo delle leggi di Newton: la legge di gravitazione, cioè la legge dell'inverso del quadrato, e le leggi del moto. Ora mettiamo al loro posto la (1) e la (2). Ma la nostra nuova coppia di leggi corrisponde anche a qualcosa che avevamo visto in elettrodinamica, dove abbiamo le equazioni di Maxwell che descrivono i campi prodotti dalle cariche e ci spiegano come la presenza di materia carica elettricamente cambia le caratteristiche dello «spazio», cioè fanno quello che fa la legge (1) per la gravità. Inoltre avevamo anche una legge che determina il moto di una particella in un campo dato: $d(m\mathbf{v}/dt) = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$. Di questo, sempre per la gravità, s'incarica la legge (2). Le leggi (1) e (2) ci danno già una formulazione precisa della teoria della gravitazione di Einstein, anche se di solito la troviamo espressa in una forma matematica più complicata. C'è ancora una cosa da aggiungere, tuttavia: come la scala temporale varia da luogo a luogo in un campo gravitazionale, così varia la scala delle lunghezze; se ci spostiamo i nostri righelli si allungano o accorciano. Quando spazio e tempo sono uniti così intimamente, è impossibile che una cosa che accade al primo non si rifletta in un modo o nell'altro sul secondo. Lo si vede anche dal più semplice degli esempi: supponiamo che un'astronauta stia oltrepassando la Terra. Allora quello che dal *suo* punto di vista è *tempo* dal *nostro* è anche spazio, e dunque pure quest'ultimo deve cambiare. È tutto lo *spazio-tempo* a essere distorto dalla presenza di materia, e questa è una cosa più complicata di una semplice variazione della scala temporale. Tuttavia la regola che abbiamo fornito con l'equazione (6.3) basta a determinare tutte le leggi gravitazionali in modo completo, a patto di tener presente che questa regola sulla curvatura dello spazio non vale solo dal punto di vista di un singolo osservatore, ma è vera per tutti. Chi si vede oltrepassare da una certa massa vede un contenuto di massa diverso dalla massa a riposo a causa dell'energia cinetica del moto relativo, a cui corrisponde una massa addizionale. E la teoria deve essere strutturata in modo che chiun-

que, quale che sia il suo moto, quando considera una sfera scopra che il suo eccesso del raggio è $G/3c^2$ volte la massa totale (o meglio $G/3c^4$ volte il contenuto energetico totale) in essa presente. Questo principio - il principio (1) - è vero in qualsiasi sistema in movimento, e tale validità generale è una delle grandi leggi della gravitazione, la cosiddetta *equazione di Einstein del campo*; l'altra grande legge è il principio (2), quello per cui gli oggetti devono muoversi in modo da massimizzare il tempo proprio, che prende il nome di *equazione di Einstein del moto*. Scrivere queste due leggi in perfetta forma algebrica, confrontarle con quelle di Newton o metterle in relazione con l'elettrodinamica sono cose matematicamente difficili; ma è così che si presentano, oggi, le nostre leggi gravitazionali più complete.

Nell'esempio, molto semplice, che abbiamo esaminato tali leggi danno risultati che concordano con quelli della meccanica newtoniana; ma non è sempre così. Le prime tre discrepanze conosciute furono derivate dallo stesso Einstein, e oggi sono confermate sperimentalmente tutte e tre. Sono queste: l'orbita di Mercurio non è una ellisse fissa; passando accanto al Sole la luce delle stelle viene deflessa circa il doppio di quanto ci si potrebbe aspettare; la velocità di un orologio dipende dalla sua posizione in un campo gravitazionale. E ogni volta che si è scoperta una discrepanza fra le previsioni di Einstein e le idee della meccanica newtoniana, la natura ha scelto Einstein.

Vediamo di ricapitolare tutto quello che è stato detto al seguente modo: innanzitutto le scale dei tempi e delle distanze dipendono dalla posizione nello spazio e dall'istante in cui vengono misurati. Dire questo equivale a dire che lo spazio-tempo è curvo. Data l'area di una sfera possiamo calcolare il raggio previsto che sarà $\sqrt{A/4\pi}$, ma il raggio effettivamente misurato supererà quello previsto in misura proporzionale (secondo la costante $G/3c^2$) alla massa totale contenuta nella sfera. Viene così determinata l'entità esatta della curvatura dello spazio-tempo, che deve essere sempre la stessa indipendentemente dall'osservatore o da come si muove il corpo osservato. In secondo luogo, in questo spazio-tempo curvo le particelle percorrono «linee rette», cioè traiettorie di tempo proprio massimo. Il contenuto delle leggi della gravitazione, per come sono formulate da Einstein, è questo.

Stampato nel giugno 2004
dalla Techno Media Reference s.r.l. - Cusano (MI)

Piccola Biblioteca Adelphi
Periodico mensile: N. 512/2004
Registr. Trib. di Milano N. 180 per l'anno 1973
Direttore responsabile: Roberto Calasso

«In breve, possiamo spiegare a un marziano da che parte sta il cuore. Basta dirgli: "Senti, fa' un magnete, metti l'avvolgimento, attacca la corrente, poi prendi un po' di cobalto e abbassa la temperatura. Se prepari l'esperimento in modo che gli elettroni vadano dai piedi alla testa, allora la corrente entra nell'avvolgimento a destra ed esce a sinistra". E così, ormai è possibile, con un esperimento di questo tipo, definire destra e sinistra».

Incoraggiati dallo strepitoso successo dei *Sei pezzi facili*, i curatori hanno invano passato al setaccio le *Lectures on Physics* nella speranza di trovare altri «pezzi» dello stesso tipo. In compenso si sono imbattuti in una folta serie di testi di livello leggermente superiore - «meno facili», ma non al punto da non essere accessibili anche a studenti alle prime armi. Il frutto di quella selezione è il presente volume, il cui filo conduttore è una teoria tanto popolare quanto poco capita: la teoria della relatività di Einstein. Seguire una lezione di Feynman richiede una costante allerta, per evitare di cadere nei trabocchetti che egli tende di continuo. Come ha scritto il grande fisico Freeman Dyson, il suo fare burlesco e giocoso cela infatti uno stile dialogico degno di un filosofo antico. Un esempio illuminante ci è qui offerto dall'illustrazione della simmetria, un concetto astratto che insieme a quello di «eleganza matematica» ricorre di continuo nella fisica teorica e a cui Feynman attribuisce un significato preciso. Se comunicassimo via radio con un extraterrestre, quale *esperimento* potremmo suggerirgli, senza nominare le parole «destra» o «sinistra», per dargli modo di stabilire da che parte batte il cuore umano? Con lo stesso spirito, Feynman sa far luce sulle proprietà dello spazio-tempo e della sua curvatura - non semplici artifici matematici, ma ingredienti fondamentali dell'universo in cui viviamo.

Traduzione di Gianni Rigamonti.